FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (starší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-2.1 Kniha (opravoval Filip)

Filip minule zobral dve najnovšie vydania Odviate vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviate vetrom váži pol kila (m = 0,5 kg), má N = 600 strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je f = 0,5, rozmery knihy sú 20 cm x 30 cm (a = 20 cm, b = 30 cm). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?

Začnime tým, že si spomenieme na dôverne známe príklady zo školy. Máme kváder na podložke a rátame, akou silou naň musíme pôsobiť. V čom sa naša kniha líši? Takmer v ničom! Je to len veľa kvádrikov na sebe.

Vezmime do ruky odlepidlo a odlepme z väzby knihy všetky stránky. A teraz ich tam opäť pripevnime silomerami. Je jasné, že celková sila, ktorou musíme ťahať knihy, bude súčtom síl na silomeroch upevnených na jednotlivých stránkach. Tak ich poďme vyrátať.

Úplne vrchná stránka je len voľne položená. Jej tiaž je $\frac{m}{N}g$. Musíme ju teda ťahať silou $F_{t1} = f\frac{m}{N}g$. A čo teraz s tou stránkou pod ňou? Okrem svojej vlastnej tiaže je aj pritláčaná stránkou nad ňou, čiže trecia sila už bude $F_{t2} = f\frac{2m}{N}g$. Ale pozor, toto nieje všetko. Treba si všimnúť, že na našu stránku pôsobí ešte jedna sila. Áno, je to reakcia na treciu silu stránky nad ňou. Výsledná sila, ktorú nám ukáže silomer bude teda súčtom[1] týchto dvoch síl. Výsledná sila preto je:

$$F_2 = F_{t1} + F_{t2}$$

$$F_2 = f\frac{m}{N}g + f\frac{2m}{N}g$$

Už je asi jasné, ako bude vyzerať sila pôsobiaca na n-tú stránku. Je to opäť súčet trecích síl pôsobiacich na jej vrchnej a spodnej strane. Tieto sily sú priamoúmerné hmotnosti stránok nad plochou, na ktorej pôsobia. Čiže:

$$F_n = F_{t(n-1)} + F_{tn}$$

$$F_n = f\frac{m(n-1)}{N}g + f\frac{mn}{N}g = f\frac{m}{N}g(n-1+n)$$

No skvelé. Zostáva nám už len zistiť výslednú silu pôsobiacu na väzbu knihy. V prípade ľavej knihy treba sčítať každú druhú silu (patrí jej totiž len každá druhá stránka) začínajúc hneď od prvej a končiac pri predposlednej[2]:

$$F_{ľavá} = f\frac{m}{N}g((1)+(2+3)+\ldots(2N-2+2N-1)) = f\frac{m}{N}g\frac{2N(2N-1)}{2} = fmg(2N-1)$$

---

[1] Reakčná sila má opačný smer ako pôvodná trecia sila na spodku prvej stránky a teda smeruje presne rovnako, ako trecia sila na spodku druhej stránky.

[2] Na kope je spolu 2N stránok.

V prípade pravej knihy sumujeme tiež každú druhú silu, ale tentoraz začneme tou druhou:

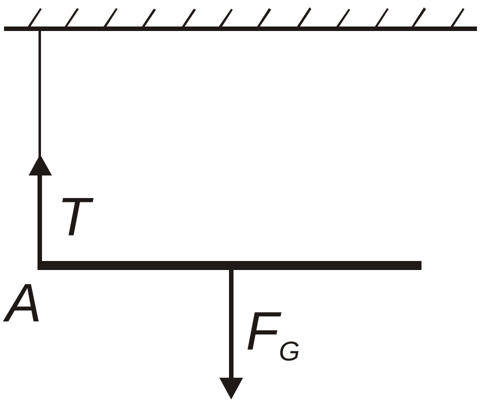
$$F_{pravá} = f\frac{m}{N}g(2+3+\ldots+2N) = fmg(2N+1-\frac{1}{N})$$

A máme výsledok. Ešte by nás malo zaraziť, že tie dve sily niesu rovnaké. Čudné, veď akcia a reakcia, nie? No nie úplne. Uvedomme si, že je tam ešte aj stôl a keby sme zarátali aj sily pôsobiace naň, tak nám naozaj vyjde rovnosť. To čo nám vyšlo je úplne logické, na stránky pravej knihy tlačí vždy o jednu stránku viac ako na rovnakú stránku ľavej knihy. A čo sa týka názvu, ak dosadíme zadané hodnoty, výsledné sily budú rovné približne 3000N, čiže žiadny vietor ich len tak neodveje.

A-2.2 Záves (opravoval Lukáš, vzorák Marcelka)

Palička si visí. Zrazu prestrihneme jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je m a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :).

Začnime zakreslením síl, ktoré pôsobia na paličku tesne po prestrihnutí jedného zo špagátov. Ako to už býva zvykom, na paličku pôsobí gravitačná sila $F_G = mg$. Okrem nej na paličku môže pôsobiť silou už iba druhý (neprestrihnutý) špagát (silu označíme T). Samozrejme predpokladáme, že špagát sme si kúpili v obchode s ideálnymi špagátmi, a teda má veľa super vlastností – nenatiahnuteľný, nehmotný, pekný, skromný, slušný, inteligentný a milý k deťom.[3]



Vráťme sa však späť k príkladu. Sila, ktorou pôsobí takýto nehmotný špagát na iné veci, musí byť rovnobežná so špagátom. Inak by sme z pohybových rovníc odvodili, že sa nejaké časti špagátu začnú pohybovať s nekonečne veľkým zrýchlením.

Na paličku budú teda pôsobiť dve sily: gravitácia a sila od špagátu. Ich smery a pôsobiská sú zakreslené na obrázku.

Pohyb paličky bude určite kombináciou posuvného a otáčavého pohybu.[4] Zapíšeme si rovnice pre tieto pohyby (otáčanie je okolo bodu A – koncového bodu paličky):

$$F_G - T = ma$$

$$F_G\frac{l}{2} = I\varepsilon$$

Symboly v rovniciach: l je dĺžka paličky, a je zrýchlenie paličky, ε je uhlové zrýchlenie paličky, I je moment zotrvačnosti paličky vzhľadom na bod A (a teda $I = \frac{1}{3}ml^2$).

Všimnime si, že obe sily pôsobiace na paličku majú v momente prestrihnutia špagátu zvislý smer. Bod A sa však nemôže hýbať v zvislom smere,[5] takže bude mať tesne po prestrihnutí

---

[3] V prípade záujmu volajte 0904 283 856. Zn. Pravá láska si nájde cestu.

[4] Aj paličku sme si kúpili v obchode s ideálnymi paličkami, takže je okrem iného dokonale tuhým telesom. A tuhé telesá vedia vykonávať iba posuvný a otáčavý pohyb (nevedia sa deformovať).

[5] Bod A sa nemôže hýbať nadol, pretože špagát je nenatiahnuteľný. Je celkom intuitívne, že sa nebude hýbať ani nahor: to by znamenalo, že špagát nebude na paličku pôsobiť žiadnou silou. Preto by na paličku pôsobila len gravitácia a palička by vykonávala rovnomerne zrýchlený pohyb nadol, čo je v spore s tvrdením, že bod A sa hýbe nahor.

špagátu nulové zrýchlenie. Okrem toho vieme, že ťažisko paličky má zrýchlenie a. Uhlové zrýchlenie paličky teda bude $e = \dfrac{a}{l/2}$ (rozdiel zrýchlení ťažiska a bodu A predelený ich vzdialenosťou).

Keď do druhej rovnice dosadíme za I a ε, dostaneme:

$$F_G \frac{l}{2} = \frac{1}{3} ml^2 \frac{a}{l/2}$$

Získali sme dve rovnice o dvoch neznámych – T a a. Jednoduchými úpravami dostaneme výsledok: $T = \dfrac{F_G}{4} = \dfrac{mg}{4}$.

Na záver - viacerí ste prišli k výsledku $mg/2$ a to nasledujúcou úvahou: V ustálenom stave pred prestrihnutím je každý zo špagátov napínaný presne touto silou. Ak uvažujeme deformovateľnú paličku, tak tesne po prestrihnutí špagátu nezačne vykonávať presne otáčavý pohyb okolo druhého závesného bodu, ale začne padať iba jeden jej koniec. Tak vznikne akýsi „vzruch" - malá deformácia, ktorá kvôli tuhosti paličky „cestuje" tyčou rýchlosťou šírenia zvuku (v danom materiáli) a je jasné, že pokiaľ aspoň raz neprejde tyčou, tak druhý špagát vôbec „nevie" o tom, že jeho verného druha prestrihli a stále si ťahá $mg/2$. Táto úvaha je samozrejme správna pre skutočne VEĽMI krátke časy po prestrihnutí špagátu. Problémom je, že v zadaní sa nehovorí o tom ako veľmi „tesne po prestrihnutí" máme situáciu uvažovať a ani to, či uvažujeme tyčku deformovateľnú, alebo nie. Stále však platí, že ak nerozumiete presne zadaniu, treba sa pýtať spresňujúce otázky, alebo vyriešiť problém komplexne, vybrať si z príkladu to najtriviálnejšie čo sa dá nie je určite dobrý spôsob získania veľa bodov, čo sa odrazilo aj na vašom hodnotení.

A-2.3 Maličkosť (opravoval Bzdušo)

Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

.moc.stcafsirronkcuhc.www an caiV .lavotratšan mod A.
atua do imkičúľk mod ťúnkmodo lašúkop zar as sirroN
kcuhC

Pozrime sa najprv, ako si s úlohou poradili niektorí odborníci. Harcela Mrdá založila svoje experimentálne riešenie na tom, že Kubova *maličkosť* je *malá*. Meter Paták k úlohe pristupoval teoreticky a zvážil *dosiahnutie okraja* prostredníctvom kvantového tunelovania. Činke Ťevorovej sme strhli 5 bodov za opisovanie. Marián Bein iba pokrčil plecami.

Skrátka, v zadaní je málo údajov. Zdá sa, že výsledok *nie je z čoho* vydolovať. Nevzdajme sa však takto zavčasu[6] a označme si hmotnosť maličkosti ako veľké M, rýchlosť po drcnutí ako malé v a pozrime sa, aké na ňu pôsobia sily.

Tiažová sila a tlaková sila od podložky sa navzájom vyrušia. Ostáva len odporová sila. Tá je bez ohľadu na prítomnosť koliesok priamo úmerná tlakovej sile $F_N = mg$ podľa

$$F_T = fF_N \quad \text{resp.} \quad F_T = \xi F_N / R,$$

kde f je koeficient šmykového trenia a ξ koeficient valivého odporu. Keď v druhej rovnici označíme $\xi/R = f^*$, odhaľujeme jej *rovnakosť* s prvou.

Spomalenie *maličkosti* $a = F_T/M = fg$ je konštantné. Ide teda o rovnomerne spomalený pohyb, pri ktorom je závislosť prejdenej dráhy od času

[6] Za rána za rosy, dobre sa kosí.

$$s = vt - \frac{1}{2}at^2.$$

Jedna rovnica a v nej dve neznáme: zrýchlenie a a rýchlosť v. Na prvý pohľad to vyzerá tak, že o zrýchlení[7] a sa z rovnice nedozvieme nič. Skúsme sa s tým však hrať ďalej. Pre každé zvolené zrýchlenie vieme dopočítať príslušnú rýchlosť. Vezmime napríklad $a = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Dostávame

$$v = \frac{s}{t} + \frac{1}{2}at = 10{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}}.$$

A zo zaujímavosti zrátajme, akou rýchlosťou prišla maličkosť na okraj stola. Dostávame

$$v(t) = v - at = -9{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}},$$

čo je záporné číslo. **Čo to znamená?** Znamená to *pohyb naspäť*. Keby náš stôl nemal okraj a na maličkosť pôsobí stála sila v tom istom smere ako pôvodne pôsobila trecia sila (= stále zrýchlenie/spomalenie), po nejakom čase sa začne vracať naspäť a v našom vzťahu pre prejdenú dráhu sa to prejaví ako zmenšenie prejdenej dráhy.[8]

Z fyzikálnej podstaty úlohy[9] však vieme, že maličkosť sa na okraji stola *musí* pohybovať nezápornou rýchlosťou, teda

$$v - at \geq 0,$$

čo nám umožňuje riešiť systém dvoch (ne)rovníc o dvoch neznámych. Ak z rovnice dosadíme za rýchlosť do nerovnice, dostávame

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{1}{2}at\right) - at \geq 0$$

$$a \leq \frac{2s}{t^2}$$

a ak si spomenieme, že $a = fg$, dostávame podmienku

$$f \leq \frac{2s}{gt^2} \approx 0{,}05.$$

Keď si otvoríme tabuľky,[10] zistíme že bežné koeficienty trenia majú hodnoty v rozmedzí 0,3 až 0,6. Takmer žiadne dva materiály však nemajú koeficient trenia menší ako 0,1.

Na druhej strane, podiel $f^* = \xi / R$ môže byť ľubovoľne veľký, v závislosti na polomere koliesok, teda aj rovný 0,05. Možno preto očakávať, že **Kubova maličkosť má kolieska.**

A-2.4 Malý princ... (opravoval Tomáš)

si len tak sedí na svojej planétke o hmotnosti M. Zrazu okolo nej prefrčí asteroid o hmotnosti m rýchlosťou v. Koľko energie z celkovej kinetickej energie asteroidu dokáže malý princ zužitkovať? Aby ste si lepšie vedeli predstaviť, ako vyzerá také získavanie energie, uvedieme jeden ilustračný príklad: Vezmete dynamo (také malé oné s kolieskom, majú to niektoré bicykle. Otáčaš kolesom - vyrábaš prúd), namotáte naň dostatočné množstvo nekonečne tenkého, nekonečne pevného a nehmotného špagátu, ktorého druhý koniec harpúnujete do asteroidu a potom už len čakáte, koľko elektriny vám odvíjajúce sa lanko na dyname vyprodukuje, kým asteroid nezastane. Aby sa vám ľahšie rátalo môžete predpokladať, že vzdialenosť planétky od priamky po ktorej letel asteroid je veľmi malá. Bonusový bod dostanete ak úlohu zrátate pre všeobecnú vzdialenosť d.

Pozrem na príklad a hneď vidím: riešenie je $mv^2/2$, nie? Toto číslo predsa predstavuje kinetickú energiu druhého asteroidu (rátanú vo vzťažnej sústave planétky) a ak ju (v ideálnom prípade) celú zužitkujem musím mať správny výsledok. Kde je problém? Práve v

[7] Keďže *a* je zviazané so spomaľovaním a teda trecou silou, to je to, čo by sme radi.

[8] To nie je prípad trecej sily. V okamihu zastavenia prestane trenie pôsobiť a pohyb ustane *navždy*.

[9] Komu nie je jasné čo sa tým myslí, nech si ešte raz poriadne prečíta posledný odstavec.

[10] Napríklad http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Tribology/co_of_frict.htm alebo na wikipédii.

tom zužitkovaní. Predstavte si situáciu, kedy planétka malého princa váži kilo a asteroid 10 ton. Odpoveď $mv^2/2$ by vyžadovala, aby sa po procese zužitkovávania asteroid zastavil - aby sa pohyboval presne takou rýchlosťou ako planétka *na začiatku*. Je však jasné, že napríklad v tomto prípade si asteroid ani nevšimne, že nejaká planétka sa k nemu priharpúnovala a svoju energiu si „ponechá“. Čo s tým?

V prvom rade, zameriame sa na prípad, keď asteroid aj planétka sa pohybujú po tej istej priamke smerom od seba. Naša predošlá odpveď by bola skoro dobrá, všetko čo potrebujeme je zabezpečiť, aby asteroid na konci procesu stál. Koniec zužitkovávania energie spoznáme podľa toho, že asteroid a planétka sa už voči sebe nehýbu čo zase znamená, že sa obe hýbu rovnakou rýchlosťou *u*. Zákon zachovania hybnosti potom pre túto rýchlosť dáva:

$$mv + 0 = (m + M)u \xrightarrow{\text{a teda}} u = \frac{mv}{m + M}$$

Vo vzťažnej sústave[11], ktorá sa na začiatku voči planétke pohybuje rýchlosťou *u* teda situácia vyzerá nasledovne: Asteroid aj planétka si to šupujú od seba (alebo k sebe) rýchlosťami *u* (planétka) a *v-u* (asteroid), zrazu planétka harpúnuje asteroid, harpúnovacie lano začne spomaľovať vzájomné vzďaľovanie sa telies, až nakoniec obe telesá ZASTANÚ. Vďaka tomuto je celková energia vyťažená z harpúnovania rovná pôvodnej kinetickej energií OBOCH[12] telies. Rýchlosti aj hmotnosti oboch telies poznáe a dorátať sa k výsledku $\frac{1}{2}\frac{Mmv^2}{M+m}$ by mala byť malinovka.

Spôsob akým sme tento výsledok skonštruovali v sebe nesie dve pekné vlastnosti: jednak hneď vidíme, že takúto energiu z asteroidu vycucať vieme a tiež hneď vidíme, že viac z neho vycucať nepôjde nijakou cestou (to by znamenalo že v našej sústave by sme museli minúť viac ako 100% kinetickej energie telies).

Trochu problémov môže spôsobiť druhá časť úlohy. Tuto sa totiž časť energie minie na roztočenie sústavy. Hneď teda vidíme, že v tomto prípade dostaneme menšiu hodnotu, ako v prvej časti. Aby sme zistili o koľko menšiu, prenesieme sa zase do sústavy spojenej s planétkou. Asteroid mal na začiatku voči planétke moment hybnosti o veľkosti *mdv* a tento sa musí zachovávať. Ak po celom cirkuse sa bude asteroid pohybovať po priamke, ktorá bude od planétky vzdialená *l* a jeho rýchlosť bude *v'*, máme rovnosť *mdv=mlv'*. Pokiaľ naozaj poctivo vycucáme z asteroidu všetku energiu, ktorú vieme, skončí to tak, že *l* bude obrovské (limitne nekonečné) a *v'* nulová (zase, limitne). V limitnom prípade teda na roztočenie sústavy nevynaložíme skoro žiadnu energiu a odpoveď z prvej časti úlohy, trochu paradoxne voči konštatovaniu na začiatku odstavca, sa nemení. Iným argumentom pre tento výsledok je fakt, že z dôvodov rozmerovej analýzy je nemožné nakombinovať vzorec, ktorý by *d* zahŕňal ako parameter a len zo zadaných veličín by vyrátal odpoveď so správnou jednotkou (Joul).

Na záver, pokiaľ uvažujeme pomerne malú planétku a asteroid (kto čítal Malého princa tak vie, že typický rozmer planétky je okolo 3 baobabov) môžeme zanedbať gravitačné pôsobenie týchto objektov. Pokiaľ by boli objekty veľké, pridali by sme k uvedenému výsledku člen za gravitačné pôsobenie (nebol by zložitý).

---

[11] Na zamyslenie je, že sa jedná akurát o sústavu pevne spojenú s ťažiskom planétky a asteroidu.

[12] V tejto vzťažnej sústave sa na začiatku pohybujú obe telesá.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	②+B	Σ
1	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	17.51	4.90	5.00	5.00	5.00	-	20.34	37.84
2	Honzáková Kateřina	GJK Praha	18.86	5.00	5.00	5.00	0.00	-	16.80	35.66
3	Kieferová Mária	GSF Žilina	16.25	5.00	5.00	3.50	5.50	-	19.00	35.25
4	Polačko Martin	G KE Alejová	18.50	5.00	5.00	4.90	0.00	-	14.90	33.40
5	Hruška Eugen	G Hlohovec	18.38	5.00	2.00	0.50	5.00	-	14.63	33.00
6	Vanya Peter	G BA J.Hronca	15.20	5.00	5.00	1.00	5.00	-	16.00	31.20
7	Bačo Ladislav	G KE Poštová	17.80	5.00	1.50	3.50	0.00	-	12.20	30.00
8	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	18.30	5.00	-	3.50	1.00	-	11.69	29.99
9	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	12.00	5.00	0.00	4.50	5.00	-	16.38	28.39
10	Chudjak Martin	SPŠ Martin	14.82	5.00	5.00	-	-	-	12.20	27.02
11	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	15.50	5.00	0.50	2.50	3.50	-	11.50	27.00
12	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	14.82	5.00	0.50	2.50	0.00	1	9.08	23.90
13	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	14.10	5.00	-	2.50	-	-	9.53	23.63
14	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	12.00	4.00	0.40	3.50	-	-	9.97	21.97
15	Hagara Michal	G BA J.Hronca	7.00	5.00	0.00	5.00	0.00	-	12.20	19.20
16	Kuklišová Nina	G BA Metodova	13.00	4.00	0.50	0.80	0.00	-	5.30	18.30
17	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	18.20	-	-	-	-	-	-	18.20
18	Baxová Jana	G Ľ. Štúra Trenčín	5.03	2.50	5.00	2.50	0.00	-	12.20	17.23
19	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	13.92	4.00	0.50	1.50	-	5	2.80	16.72
20	Bachratý Martin		6.50	5.00	0.30	-	-	-	6.96	13.46
21	Lešková Andrea	G Lipany	7.68	4.00	0.10	-	-	-	5.49	13.17
22	Vanta Radovan	G BA Metodova	12.74	-	-	-	-	-	-	12.74
23	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	12.00	-	-	-	-	-	-	12.00
24	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	11.75	-	-	-	-	-	-	11.75
25	Pločeková Andrea	G Piešťany	11.19	-	-	-	-	-	-	11.19
26	Jursa Jakub	G KE Alejová	10.90	-	-	-	-	-	-	10.90
27	Petrucha Michal	G BA Metodova	9.50	-	-	-	-	-	-	9.50
28	Matulová Daniela	G BA Papánka	4.02	1.50	0.30	1.50	-	-	4.47	8.49
29	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	2.05	-	-	-	-	-	-	2.05