Programovanie, 3. prednáška

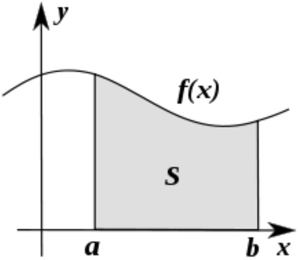
Peter Vanya
Jarná škola FX

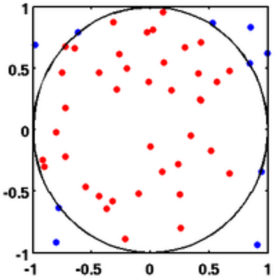
16. apríla 2014

Integrovanie

Existujú dve metódy:

1. **kvadratúra** – posekanie na kúsky a aproximovanie obdĺžnikom, lichobežníkom, alebo polynómom.
2. **Monte Carlo** – triafanie bodov náhodne a započítanie tých, ktoré sa nachádzajú v danom území.





Kvadratúra

Obdĺžniková metóda berie stredný bod každého *malého* intervalu od a do b.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Lichobežníková metóda berie spája hodnoty funkcie v a, b úsečkou:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Otázka! Ktorá metóda je presnejšia?

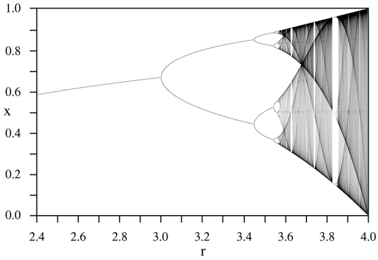
Existuje mnoho metód, veľmi známou je **Simpsonova metóda**, ktorá zoberie bod v strede medzi a, b a tieto tri body preloží parabolou.

Pseudonáhodné čísla

Počítač nevie generovať skutočne náhodné čísla, len *pseudonáhodné*. Napr. postupnosť

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

generuje náhodné čísla, v prípade že $x_0 \in [0, 1]$ a $r \in [3.6, 4]$. Je to príklad *bifurkačného diagramu*, a prišlo sa na to až v 40. rokoch 20. storočia.



Monte Carlo

Počítač generuje (pseudo)náhodné čísla nasledovne:

$$x_{n+1} = (ax_n + c)\%m$$

teda každé nasledovné číslo je akýsi zvyšok po delení.
Pozor! základná funkcia `rand()` dostupná v C++ a iných jazykoch generuje náhodné čísla len do asi 32000, čo je celkom málo. Na väčšie čísla treba využiť knižnice, napr. GNU Scientific Library.

Ako to teda využiť?

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

kde x_i je vygenerovaná náhodné číslo v intervale a, b.

Riešenie rovníc

... je jedným z najčastejších problémov počítačovej fyziky, pretože analytické riešenie častokrát neexistuje. Napríklad nájdenie x takého, že

$$f(x) = \exp(x) - x = 0$$

Najjednoduchši algoritmus: **polenie intervalov**. Zvolíme body a, b tak, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$ alebo naopak – i.e. aby bol každý na jednej strane minima.

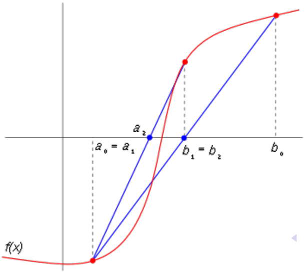
Nájdeme bod $c = \frac{a+b}{2}$ a zistíme znamienko $f(c)$. Ak $f(c)f(a) > 0$, c bude novým a. V opačnom prípade c bude novým b. Iterujeme, až dokým nedosiahneme želanú presnosť.

Regula falsi

Kritérium, ktoré nás najviac zaujíma, je **rýchlosť konvergencie**. V prípade polenia intervalov je *lineárna* pretože zakaždým sa mi interval zmenší na polovicu predošlého.

O niečo lepšou metódou je **Regula falsi**. Minimum je na priamke spájajúcej $f(a)$ a $f(b)$:

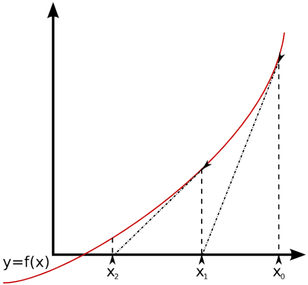
$$m = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)}$$



Newtonova metóda

Častokrát najlepšou voľbou je **Newtonova metóda**, ktorej konvergencia je kvadratická.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Pri niektorých funkciách (zistite akých) ale táto metóda zlyháva (i.e. nie je *robustná*).