# FX [f:ks]

powered by FKS

Vzorové riešenia a výsledky 3. série 3. ročníka

---

**FX7 Hmota** (Opravoval Bzdušo)

*Marián si kúpil asteroid s objemom $V$ z plastickej hmoty o hustote $\rho$, a v priestore si vyznačil bod $B$. Ako má tento asteroid vytvarovať a kam ho má umiestniť, aby bolo v bode $B$ čo najväčšie gravitačné pole? Aká by bola veľkosť tohto gravitačného poľa, ak by parametre $V$ a $\rho$ asteroidu boli zhodné s týmito parametrami Zeme?*

Úlohu si rozdelíme na dve časti, ktorým sa poriadne povenujeme. Najprv musíme nájsť tvar telesa, v čom nie je nijaká ťažká matematika. Keď sa vysporiadáme s ním, zistíme veľkosť gravitačného zrýchlenia v bode $B$, čo nám dá priestor si z chuti zacvičiť integrovanie.

Vložme si bod $B$ do počiatku súradnicovej sústavy a požadujme, aby výsledné pole v tomto bode bolo rovnobežné s osou $x$.[1] Aby sme boli dohodnutí úplne jednoznačne, tak nech pole v $B$ smeruje doprava a teda aj asteroid sa bude nachádzať napravo od osi $y$.

Predstavme si, že v rukách držíme nejaký asteroid. Ak by sa dala jeho hmota nejakým spôsobom popresúvať tak, aby sa v $B$ zväčšilo pole, tak by sme ju presunuli. Ak budeme v ruke držať správny asteroid, akýkoľvek presun hmoty bude pole v danom bode len zmenšovať. Znamená to, že povrch asteroidu musí byť tvorený bodmi, ktoré prispievajú k $x$-ovej zložke gravitačného zrýchlenia v $B$ rovnakou mierou. Inak by sme predsa mohli odlepiť kus hmoty odniekiaľ, kde prispieva menej, a pridať ju niekam, kde prispieva viac.

Ak si vezmeme rez telesa rovinou $xy$, tak hmotnosť $\mathrm{d}m$ v nejakom mieste $[x, y, 0]$, vytvára v bode $B$ pole veľkosti

$$\mathrm{d}g = \tfrac{G}{x^2+y^2}\mathrm{d}m,$$

kde $G$ je gravitačná konštanta. Pre nás je dôležitá $x$-ová zložka tohto gravitačného zrýchlenia,

$$\mathrm{d}g_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}g = \frac{Gx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}m.$$

Vieme, že hustota hmoty je konštantná, preto aby rovnako veľký kus hmoty na ľubovoľnom mieste povrchu prispieval k poľu v bode $B$

[1] Preyslite si, že symetria situácie vyžaduje aby hľadaný tvar asteroidu bol symetrický okolo osi $x$.

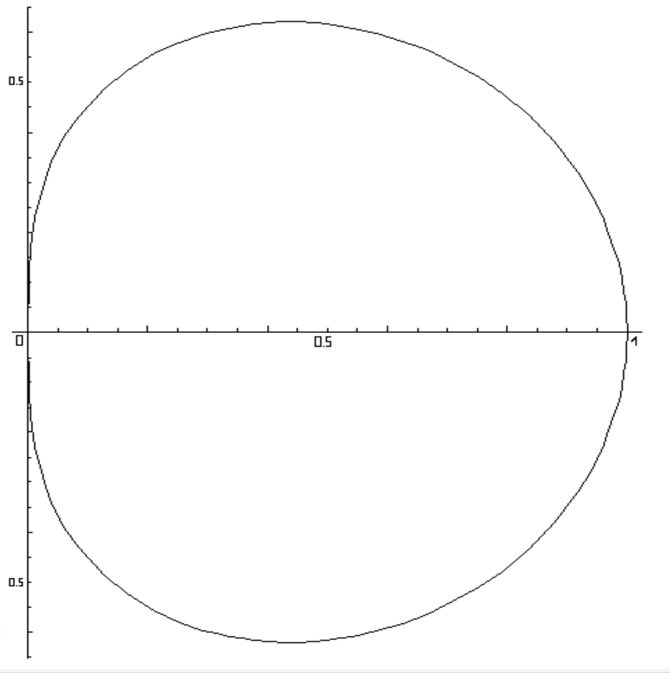
rovnako, musí pre celý povrch asteroidu platiť

$$\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = C,$$

kde $C$ je akási konštanta, o ktorej zatiaľ nič bližšie nevieme. Keď si tento výraz vhodne upravíme, dostaneme rovnicu pre povrch asteroidu v tomto reze.

$$y = \sqrt{Ax^{\frac{2}{3}} - x^2}$$

Nová konštanta $A$ je rovná $C^{-\frac{2}{3}}$. Pripomínam, že asteroid je rotačne symetrický okolo osi x. Ak cheme získať predstavu, ako ten asteroid vyzerá, môžeme využiť dáky mazaný softvér:




Teraz je ten správny čas na zvrhlé integrovanie. Aké silné pole vytvorí takýto asteroid s objemom $V$ na svojom povrchu?[2]

Rozriešme najprv problém normovacej konštanty, tj. aké musí byť $A$ v našom výraze pre $y$, aby objem asteroidu bol naozaj $V$? Rozsekajme si pozdĺž osi x asteroid na nespočet diskov s hrúbkou d$x$. Každý z nich bude mať objem

$$\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x.$$

Celkový objem určíme integrovaním. Dolná medza integrálu je zrejme nula.[3] Ak položíme $y = 0$, dostaneme aj hornú medzu $x = A^{\frac{3}{4}}$. Ak to

[2]Čitateľovi odporúčam vziať si do rúk ceruzku a papier a všetky integrály si skúsiť predstaviť na vlastnom obrázku.

[3]Zaviedli sme to ešte pri odvádzaní rovnice povrchu asteroidu

všetko spojíme dokopy, postupne dostávame

$$V = \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} (Ax^{\frac{2}{3}} - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{3}{5}Ax^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=A^{\frac{3}{4}}},$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$V = \frac{4\pi}{15}A^{\frac{9}{4}}, \qquad \text{čiže} \qquad A = \left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{\frac{4}{9}}.$$

Konečne sa môžeme pozrieť na vytvorené gravitačné pole. Aby sme mali výsledok s čím porovnať, spočítajme si vopred, aké je tiažové zrýchlenie Zeme vyjadrené pomocou jej hustoty $\rho$ a jej objemu $V$. Zem vytvára gravitačné pole ako hmotný bod,[4] preto na jej povrchu bude

$$g_Z = \frac{GM_Z}{R_Z^2}.$$

Ak si vezmeme $M_Z = \rho V$, kde objem $V$ je $\frac{4}{3}\pi R_Z^3$,dostávame

$$g_Z = \frac{4\pi\rho G R}{3} = \rho G \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\pi R_Z^3\right)\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2} = \rho G V^{\frac{1}{3}} \left(\frac{16\pi^2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Teraz sa pozrime na gravitačné pole nášho asteroidu. Opäť si asteroid rozsekáme na márne kúsky. Konkrétne znova na tenučké disky s polomerom $y$, ktoré ale ešte budú samé poskladané z akýchsi prstencov so stredom na osi x. Označme príspevok jedného konkrétneho disku vo vzdialenosti $x$ a hrúbky $\mathrm{d}x$ od počiatku súradnicovej sústavy ako $\mathrm{d}g$. Ten získame integrovaním príspevkov od spomínaných prstencov. Označme preto ešte príspevok jedného konkrétneho prstenca s polomerom $r$, hrúbkou $\mathrm{d}r$ ako $\mathrm{d}^2 g$. K výslednému poľu v bode $B$ budú prispievať len zložky $\mathrm{d}^2 g$ v smere osi $x$, kolmé zložky sa zo symetrie vyrušia. Keď si ešte uvedomíme, že hmotnosť $\mathrm{d}m$ takéhoto prstenca bude rovná $\mathrm{d}m = \rho 2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}x$,[5] dostaneme

$$\mathrm{d}^2 g_x = \frac{2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}x \rho G}{r^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

[4] Aby tento fakt platil úplne presne, musela by byť Zem homogénnou guľou, alebo by sa jej hustota v závislosti od vzdialenosti od stredu musela meniť vo všetkých smeroch rovnomerne, čo je do rozumnej miery splnené.

[5] Predstavte si ho ako slížik tvaru kvádra so stranami $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}x$ a $2\pi r$, ktorý sme zatočili do kruhu a konce spojili. Ak je dosť tenký ($\mathrm{d}r$ dosť malé), pri tejto operácii sa objem príliš nezmení.

Pre spomínaný disk dostávame

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g &= \int_{r=0}^{r=y(x)} \mathrm{d}^2 g_x \\
&= \int_0^{\sqrt{Ax^{\frac{2}{3}}-x^2}} 2\pi\rho G x \,\mathrm{d}x \frac{r\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi\rho G x \,\mathrm{d}x \left[ -\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{Ax^{\frac{2}{3}}-x^2}} \\
&= 2\pi\rho G x \,\mathrm{d}x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{A}} \right) = 2\pi\rho G \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{A}} x^{\frac{2}{3}} \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Výsledné pole v bode $B$ dostaneme integrovaním $\mathrm{d}g$ od 0 po $x_{\max} = A^{\frac{4}{3}}$.[6] Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
g = \int_0^{x_{\max}} \mathrm{d}g &= 2\pi\rho G \int_0^{A^{\frac{3}{4}}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{A}} x^{\frac{2}{3}} \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\rho G \left[ x - \frac{3}{5\sqrt{A}} x^{\frac{5}{3}} \right]_{x=0}^{x=A^{\frac{3}{4}}} \\
&= 2\pi\rho G \left( A^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{5} \left( A^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{5}{3}} A^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{4\pi}{5} \rho G A^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Ak si spomenieme, že konštantu $A$ sme si vyjadrili pomocou objemu $V$, môžeme ju zaň nahradiť a po pár úpravách dostať tvar

$$g = \rho G V^{\frac{1}{3}} \left( \frac{48\pi^2}{25} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Konečne sme došli k riešeniu. Stačí už len porovnať gravitačné zrýchlenie vytvorené Zemou na jej povrchu a pole vytvorené naším asteroidom v bode $B$. Pre podiel ich veľkostí dostaneme

$$\frac{g}{g_Z} = \sqrt[3]{\frac{27}{25}} \approx 1,026$$

Vidno, že to nie je veľký rozdiel a že guľa je vcelku optimálny tvar. Všetky integrály sa dali samozrejme počítať aj v sférických súradniciach, výsledky sú však tie isté, tak sa s tým nebudeme trápiť. Dúfam tiež, že všetky hladné otázky, ktoré bolo treba zodpovedať, sú zodpovedané a zvyšné si zodpovie každý aj sám.

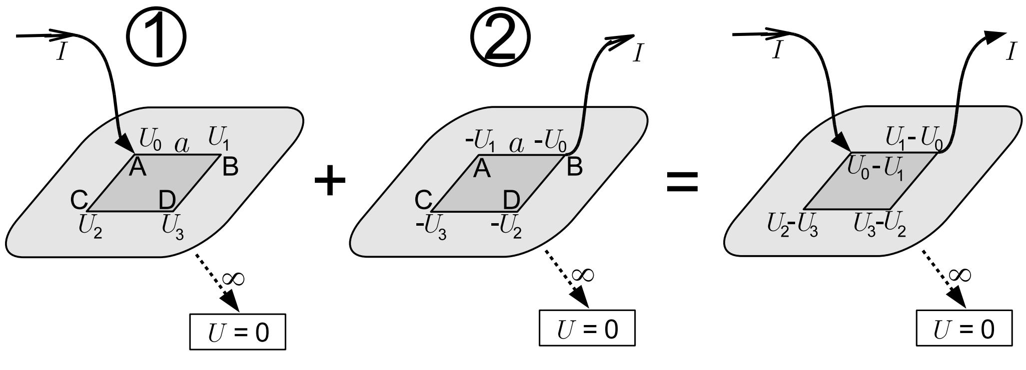
[6] Rovnosť sme odvodili pri počítaní objemu asteroidu z podmienky $y = 0$.

**FX8 Balvan** (Opravoval Jakub)

*Kubík našiel v Tatrách veľký balvan. Našiel si na ňom veľkú hladkú plochu a na ňu si nakreslil malý štvorec $ABCD$ so stranou $a$. Keď medzi body $A$ a $B$ pustil prúd $I$, medzi bodmi $C$ a $D$ nameral napätie $U$. Aký je merný elektrický odpor balvanu?*

Prvý krok je ujasnenie si podmienok, zvaný tiež idealizácia problému. Náš kameň budeme považovať za nekonečne veľký polpriestor, dokonale homogénny (s merným elektrickým odporom $\rho$ všade rovnakým) a vzduch v druhom polpriestore za dokonale nevodivý a nepolarizovateľný (najlepšie nech to je rovno vákuum). To by bola tá ľahšia časť za nami...

Ďalej využijeme silný kaliber – *princíp superpozície*. Vďaka nemu nemusíme skúmať priloženie oboch kontaktov súčasne, ale môžeme si posvietiť na situáciu s jedným priloženým kontaktom, potom osobitne s druhým kontaktom (čo sú vďaka našej idealizácii rovnocenné situácie) a potom výsledné riešenie je superpozíciou (súčtom, resp. zložením) čiastočných výsledkov. Tu by som poznamenal, že princíp superpozície je čosi absolútne základné a Maxwellove rovnice (popisujúce kompletne celý elektromagnetizmus) tento princíp samozrejme umožňujú. V našom príklade ho „zneužijeme" nasledovne:




SITUÁCIA 1: v mieste $A$ mám priložený kontakt s potenciálom $U_0$ (meraným voči Zemi dostatočne ďaleko od $A$, inak povedané, nulovú hladinu potenciálu som umiestnil do nekonečna) takým, že mi cezeň do kameňa tečie práve prúd o veľkosti $I$. Potenciál v mieste $B$ označím $U_1$, v $C$ $U_2$ a napokon potenciál $D$ bude $U_3$.

SITUÁCIA 2: v mieste $B$ mám priložený kontakt a chcem, aby mi tadiaľ z kameňa tiekol práve prúd o veľkosti $I$. Teraz si ale spomeniem, že také čosi som už predsa niekedy videl, len v trochu odlišnom šate a trošku posunuté (čo vzhľadom na rozľahlosť nekonečného rozhrania balvan-vzduch nemôže na výsledku nič meniť). Je to presne rovnaká situácia ako v 1-tke, len s opačným smerom prúdu. Zrejme teda keď všetky potenciály z časti 1 dostanú mínusko a budem ich opäť merať voči nule v nekonečne (referenčnú hladinu som zachoval), tak to bude pracovať tak ako budem ja pískať! Pre nás zaujímavé body sú síce zrkadlovo pretočené, ale to pri našej symetrickej úlohe nemôže hrať žiadnu rolu (zrkadlovo pretočená situácia 1 je stále 1 – lebo tam mám iba jeden význačný bod, ktorým do balvanu púšťam prúd). Takže môžem smelo povedať, že potenciál v $B$ bude $-U_0$, v $A$ $-U_1$, v $C$ $-U_3$ a v $D$ $-U_2$.

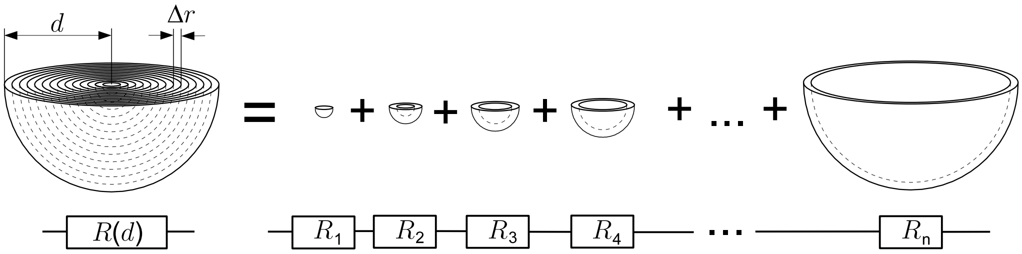
SUPERPOZÍCIA SITUÁCIÍ 1 A 2 (sčítam potenciál a prúd v každom mieste priestoru): v bode $A$ mi kontaktom tečie prúd $I$ do kameňa, v $B$ mi tečie prúd $I$ z kameňa do kontaktu. Potenciál (opäť meriam voči nekonečnu, kde je aj po superpozícii nulový potenciál) v $A$ je $U_0 - U_1$, v $B$ $U_1 - U_0$, v $C$ $U_2 - U_3$ a v $D$ $U_3 - U_2$. Všimnime si, že táto superpozícia jednoduchých situácií 1 a 2 je presne náš zadaný problém, ktorý máme riešiť (lebo balvanom naozaj preteká prúd $I$ medzi bodmi $A$ a $B$, čo je jediná podmienka, ktorú musíme splniť, aby sme dostali ekvivalentnú situáciu). Ostáva nám teda určiť $U_2$ a $U_3$ v závislosti od $I$, $\rho$ a $a$ – potom napätie $U$ zo zadania je rovné absolútnej hodnote rozdielu potenciálov v bodoch $C$ a $D$, čiže $U = 2\,|U_2 - U_3|$. Očakávame teda, že cez $U_2$ a $U_3$ dostaneme závislosť $U$ od $I$, $\rho$ a $a$, z ktorej vyjadríme $\rho$ pomocou známych veličín $U$, $I$ a $a$.

Riešme teraz situáciu 1. Máme bod $A$, ktorým do balvanu „pumpujeme“ prúd $I$, merný elektrický odpor balvana je $\rho$ a v nekonečne je nulový potenciál. Vidno, že situácia je rotačne symetrická, preto môžeme bez väčších okolkov vyhlásiť, že $U_1 = U_2$. A to nie je všetko. Ak sa lepšie prizrieme, zbadáme, že situácia je dokonca v rámci kamenného polpriestoru sféricky symetrická – to znamená, že potenciál na ľubovoľnej polsfére (povrch polgule) so stredom v bode $A$ je konštantný.

Teraz urobíme krok, ktorý sa vymyká predstavivosti bežných indivíduí, hoci je zrejmé, že má zdravé jadro – konkrétne, ten náš balvan môžeme chápať ako vodič (drôt) medzi bodom $A$ a „nekonečnom“, so zväčšujúcim sa prierezom $S = 2\pi r^2$, kde $r$ značí vzdialenosť od bodu $A$. To môžeme preto, lebo prúd naozaj tečie vždy len smerom von z polgule so stredom v $A$. Skúsime určiť odpor takéhoto vodiča: Určite poznáte vzťah pre odpor $R$ vodiča konštantného prierezu $S$, dĺžky $d$ a s merným elektrickým odporom $\rho$ v podobe $R = \rho\frac{d}{S}$. Tak my si náš polguľovitý vodič môžeme rozkúskovať na tenučké škrupinky hrúbky

$\Delta r$ a prierezu $S = 2\pi r^2$, ktoré sú zapojené sériovo za sebou. Môžeme to urobiť práve preto, lebo na povrchu každej takej škrupinky bude konštantný potenciál.

Výsledný odpor nášho vodiča od počiatku $A$ do bodu vo vzdialenosti $d$ bude potom suma všetkých odporov škrupiniek až po tú škrupinku, ktorej polomer je práve $d$.




Nuž a keď prejdeme od škrupiniek malilinkej hrúbky k infinitenzimálnej hrúbke, tak sa nám suma zmení na integrál, z $\Delta r$ sa stane diferenciál d$r$ a dostávame vzťah

$$R(d) = \int_0^d \rho \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2} = [-\frac{\rho}{2\pi r}]_0^d = -\frac{\rho}{2\pi d} + \frac{\rho}{2\pi 0}.$$

Toto je však trošku nepríjemné, lebo sme dostali v menovateli nulu (hovoríme, že integrál diverguje do plus nekonečna). Skúsime sa s tým nejako vyrovnať. Najprv odstránime ideologický problém (skutočne by bolo nepríjemné, keby nám náš odpor vyšiel nekonečný, lebo by sme ním nemohli „pretlačiť“ žiaden prúd) tým, že kontakt nikdy nebude presne bodový. Každý rozumný kontakt má nejaký rozmer, označme ho $\alpha$, a ten môžem pri istej dávke predstavivosti považovať za veľmi dobre vodivý a polguľovitý. Potom by sme pri určovaní odporu vo vzdialenosti $d$ od bodu A dostali ako výsledok integrálu $R(d) = [-\frac{\rho}{2\pi r}]_\alpha^d = -\frac{\rho}{2\pi d} + \frac{\rho}{2\pi\alpha}$, čo už je konečné. Praktický problém vyriešime ešte jednoduchšie, lebo my potrebujeme určiť len $U = 2\,|U_2 - U_3| = 2I(R(\sqrt{2}a) - R(a)) = 2I\int_a^{\sqrt{2}a} \rho\frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2} = 2I[-\frac{\rho}{2\pi r}]_a^{\sqrt{2}a} = \frac{I\rho(\sqrt{2}-1)}{\pi\sqrt{2}a}$, čo na rozmere kontaktu či jeho bodovosti vôbec nezávisí. Odtiaľ dostávam aj výsledok

$$\rho = \frac{U\pi\sqrt{2}a}{I(\sqrt{2}-1)}.$$

Ešte dodám, že pre odpor neveľmi extravagantných vodičov sa skutočne používa vzorec na výpočet odporu $R = \int \rho\frac{\mathrm{d}r}{S}$, ktorý má však obmedzenú platnosť pre vodiče, v ktorých je smer prúdu viac-menej rovnobežný s dĺžkou (t.j. so smerom, v ktorom uvažujeme d$r$). Táto požiadavka je splnená úplne len pre veľmi symetrické prípady: napríklad pre vodič konštantného prierezu alebo pre ľubovoľný výsek gule (napr. aj polguľu) – v takom prípade totiž prúd tečie kolmo na časti sfér a to je presne smer, v ktorom hovoríme o dĺžke ($\mathrm{d}r$).

Ešte jedna poznámka o napätí potrebnom na pustenie prúdu $I$ do zeme. Pre situáciu 1 musí platiť $U_0 = IR(\infty) = I[-\frac{\rho}{2\pi r}]_{\alpha}^{\infty} = \frac{I\rho}{2\pi\alpha}$. Čiže o veľkosti potrebného napätia rozhoduje okrem merného elektrického odporu kameňa $\rho$ a požadovaného prúdu $I$ aj veľkosť kontaktu (pri polguľovom kontakte napríklad jeho polomer $\alpha$). Presne rovnako to platí aj pre situáciu 2. Takže napätie zdroja potrebné na vyvolanie prúdu $I$ spomínaného v zadaní (za predpokladu rovnako veľkých kontaktov o polomere $\alpha$) je

$$U_{zdroj} = 2\left|U_0 - U_1\right| = 2\left|U_0 - (U_0 - IR(a))\right| = \frac{I\rho}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right).$$

**Alternatívne riešenie** zadanej úlohy využíva taktiež superpozíciu na také dve situácie ako sme mali aj my, avšak situáciu nepopisuje pomocou potenciálu, ale pomocou elektrickej intenzity $\mathbf{E}$. Táto je podľa Ohmovho zákona (zapísaného v diferenciálnom tvare) priamo úmerná plošnej hustote prúdu $\mathbf{i} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}$. Keďže prúd poznáme a náš problém je sféricky symetrický, tak vieme, že každou sférou musí tiecť práve prúd o veľkosti $I$ a smerom kolmým na ňu. V reči formúl (nie tých motorových…) zapíšeme $\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_A}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_A}|^3}$, kde $\mathbf{r_A}$ značí polohový vektor miesta A, kam púšťame prúd $I$; a vektor $\mathbf{r}$ určuje miesto, v ktorom zisťujem plošnú hustotu prúdu $\mathbf{i}$. Spolu s Ohmovým vzťahom tak ale fakticky poznáme elektrickú intenzitu $\mathbf{E}$ v celej oblasti. Vieme aj to, že $U = \int_C^D \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ (integrál po dráhe z bodu C do D). Ak si rozumne zavedieme súradnicovú sústavu, tak vyjde celkom slušný integrál, ktorý sa dá spočítať pomocou substitúcie. Výsledok je, ako inak, rovnaký.

**FX9 Búrka** (Opravoval Kubus)

*Matúš práve sedel na lúke a počítal fyziku, keď sa zrazu prihnala veľká búrka. Počas búrky do zeme náhodne udierajú blesky, pričom na kilometer štvorcový za celú búrku priemerne udrie $\rho$ bleskov. Aká je priemerná hodnota vzdialenosti Matúša a miesta, kde udrel k nemu najbližší blesk?*

**Riešenie 1.** Pravdepodobnosť, že najbližší blesk udrel vo vzdialenosti $r$ odo mňa, je súčinom pravdepodobnosti, že vo vzdialenosti $r$ nejaký blesk udrel, a pravdepodobnosti, že bližšie ako $r$ žiaden neudrel.

Samozrejme, pravdepodobnosť že blesk udrie *presne* do vzdialenosti $r$ je nulová, ale my budeme v konečnom dôsledku integrovať, a teda hrať sa s pravdepodobnosťami že blesk udrel vo vzdialenosti z intervalu $[r, r + \mathrm{d}r)$.

Označme si pravdepodobnosť, že v nejakom pevne určenom území s plochou $A$ počas celej búrky neudrel blesk, ako $p(A)$. (Náhodnosť udierania bleskov nám zaručí, že táto pravdepodobnosť je rovnaká pre ľubovoľné územie s plochou $A$.) Potom pravdepodobnosť, že vzdialenosť najbližšieho blesku je v intervale $[r, r + \mathrm{d}r)$, bude rovná

$$[1 - p(\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2)] \cdot p(\pi r^2).$$

(Ak nevieš odkiaľ sa tento vzťah vzal, pozri si znova prvú vetu vzoráku.) Samozrejme, pre malé $\mathrm{d}r$ môžeme napísať

$$\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r\mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 - r^2) \approx 2\pi r\mathrm{d}r,$$

a teda

$$p(\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2) \approx p(2\pi r\mathrm{d}r) \approx p(0) + p'(0)2\pi r\mathrm{d}r = 1 + p'(0)2\pi r\mathrm{d}r.$$

(Zrejme pravdepodobnosť $p(0)$ že do prázdnej plochy neudrie blesk je 1.) Priemerná hodnota vzdialenosti, v ktorej udrel najbližší blesk, bude teda

$$\begin{aligned} X &= \lim_{d \to 0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} nd \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [nd, nd + d)] \right) \\ &= \int_0^{\infty} r \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [r, r + \mathrm{d}r)] \\ &= \int_0^{\infty} r \cdot [1 - p(\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2)] \cdot p(\pi r^2) \\ &= \int_0^{\infty} -2\pi p'(0) r^2 p(\pi r^2)\ \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

(Prvý resp. druhý vzťah môžeme brať ako definíciu priemernej vzdialenosti. Ak vám nie je po chuti, skúste si priemernú vzdialenosť definovať sami. Ak to nejde, skúste si priemerné hocičo definovať na konečnejšom priestore udalostí.)

Teraz nám už len stačí zistiť funkciu $p$, pričom vieme že na jeden kilometer štvorcový udrie priemerne $\rho$ bleskov. Zistíme ju napríklad takouto „sedliackou úvahou“. Vezmime si nejaké územie s plochou

$A+B$ a rozdeľme ho na územia s plochami $A$ a $B$. Potom musí platiť

$$\begin{aligned} p(A+B) &= \mathbb{P}[\text{do územia } A+B \text{ neudrel blesk}] \\ &= \mathbb{P}[\text{do územia } A \text{ neudrel blesk ani do územia } B \text{ neudrel blesk}] \\ &= \mathbb{P}[\text{do územia } A \text{ neudrel blesk}] \cdot \mathbb{P}[\text{do územia } B \text{ neudrel blesk}] \\ &= p(A)p(B). \end{aligned}$$

Takýto vzťah musí platiť pre ľubovoľné $A, B > 0$. Avšak jediné funkcie, ktoré tento vzťah spĺňajú, sú exponenciálne funkcie tvaru $p(x) = e^{\alpha x}$. (Prečo? Skúste si napríklad zderivovať rovnicu $p(x+y) = p(x)p(y)$ podľa $x$.) Ešte stále však musíme nájsť konštantu $\alpha$, zrejme bude závisieť od $\rho$. Zoberme si veľmi malú plochu $\mathrm{d}A$. Priemerný počet bleskov, ktorý udrie na túto plochu počas búrky, bude z definície $\rho$ jednoducho $\rho\,\mathrm{d}A$, ale tiež ho môžeme napísať ako

$$\rho\,\mathrm{d}A = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}[\text{na plochu } \mathrm{d}A \text{ udrie } n \text{ bleskov}].$$

Lenže, keď bude plocha $\mathrm{d}A$ veľmi malá, môžeme pravdepodobnosť že na ňu udrie viac ako jeden blesk oproti ostatným zanedbať, čím dostávame

$$\begin{aligned} \rho\,\mathrm{d}A &\approx \mathbb{P}[\text{na plochu } \mathrm{d}A \text{ udrie 1 blesk}] \\ &\approx \mathbb{P}[\text{na plochu } \mathrm{d}A \text{ udrie aspoň 1 blesk}] \\ &= 1 - p(\mathrm{d}A) = 1 - e^{\alpha\,\mathrm{d}A} \\ &\approx 1 - (1 + \alpha\,\mathrm{d}A) = -\alpha\,\mathrm{d}A, \end{aligned}$$

čiže $\alpha = -\rho$ a teda pravdepodobnosť, že na plochu s obsahom $A$ počas búrky neudrie žiaden blesk, bude

$$p(A) = e^{-\rho A}.$$

Dosadením do pôvodného vzťahu pre $X$ dostávame

$$X = \int_0^\infty 2\pi\rho r^2 e^{-\pi\rho r^2} \mathrm{d}r,$$

čo nám už len zostáva zintegrovať. Nechajme si to až na koniec a pozrime sa na trochu inú metódu riešenia.

**Riešenie 2.** Zoberme si nejakú plochu $A$ a rozdeľme ju na $N$ malých kúskov. Ak budú tieto kúsky dostatočne malé, môžeme v prvom priblížení predpokladať, že na každý z nich dopadne nanajvýš jeden blesk. Pozrime sa na takýto jeden kúsok. Buď naň dopadne jeden blesk alebo nula bleskov. Jeho plocha je $A/N$, takže z definície $\rho$ naň dopane priemerne $\rho A/N$ bleskov. No ale to znamená, že jeden blesk tam bude s pravdepodobnosťou $\rho A/N$ a nula bleskov s doplnkovou pravdepodobnosťou $1-\rho A/N$. (Mimochodom, rovnakú úvahu sme robili v prvom riešení.)

Celková pravdepodobnosť, že na celú plochu $A$ dopadne $n$ bleskov, bude potom v našom priblížení

$$\binom{N}{n}\left(\frac{\rho A}{N}\right)^n\left(1-\frac{\rho A}{N}\right)^{N-n}.$$

(Lebo na niektorých $n$ z $N$ plôšok dopadne jeden blesk a na zvyšné nula bleskov.) No a zrejme čím vyššie bude $N$, tým menšie budú jednotlivé kúsky a tým presnejšie bude naše priblíženie, že na každý z nich dopadne najviac jeden blesk. A dá sa aj ukázať, že ak pošleme $N$ do nekonečna, náš vzorec bude presný. Teda pravdepodobnosť, že na plochu $A$ udrie $n$ bleskov, bude

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A,n] &= \lim_{N\to\infty}\binom{N}{n}\left(\frac{\rho A}{N}\right)^n\left(1-\frac{\rho A}{N}\right)^{N-n}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-n)!n!}\frac{(\rho A)^n}{N^n}\left(1-\frac{\rho A}{n}\right)^N\left(1-\frac{\rho A}{n}\right)^{-n}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-n)!N^n}\frac{(\rho A)^n}{n!}\left(1-\frac{\rho A}{N}\right)^N\left(1-\frac{\rho A}{N}\right)^{-n}\\
&= 1\cdot\frac{(\rho A)^n}{n!}\cdot e^{-\rho A}\cdot 1.
\end{aligned}$$

Sami si premyslite, prečo má každý zo súčiniteľov uvedenú limitu. V určení limity tretieho z nich sme použili známy vzťah $(1+\frac{x}{N})^N\to e^x$.

Kto chce vedieť viac, nech si napríklad na internete vyhľadá Poissonovo (a na oživenie pamäti aj Binomické) rozdelenie, kto nie, nech si aspoň overí, že tento náš vzťah dáva správne výsledky pre pravdepodobnosť že na plochu udrie aspoň nula bleskov (mala by byť samozrejme rovná 1), pre očakávaný počet bleskov (malo by byť $\rho A$, z čoho sme vychádzali), aj pre pravdepodobnosť, že na plochu $A$ neudrie žiaden blesk (mala by byť rovnako $p(A)$ ako sme zrátali predtým).

My tento vzťah už len použijeme na spočítanie príkladu. Podobne ako minule napíšeme pre priemernú hodnotu $X$ vzdialenosti najbližšieho blesku, len už nebudeme používať pôvodné $p$ ale náš vzťah.

$$
\begin{aligned}
X &= \lim_{d \to 0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} nd \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [nd, nd+d)] \right) \\
&= \int_0^\infty r \cdot \mathbb{P}[\text{vzdialenosť najbližšieho blesku} \in [r, r+\mathrm{d}r)] \\
&= \int_0^\infty r \cdot \mathbb{P}[\text{bližšie ako } r \text{ udrelo 0 bleskov}] \cdot \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}[\text{vo vzdialenosti } [r, r+\mathrm{d}r) \text{ (v tom medzikruží) udrel 1 blesk}] \\
&= \int_0^\infty r \cdot \frac{(\rho\pi r^2)^0}{0!} \cdot e^{-\rho\pi r^2} \cdot \frac{(\rho 2\pi r \mathrm{d}r)^1}{1!} \cdot e^{-\rho 2\pi r \mathrm{d}r} \\
&= \int_0^\infty r \cdot \frac{1}{1} \cdot e^{-\rho\pi r^2} \cdot \frac{\rho 2\pi r}{1} \cdot 1 \ \mathrm{d}r = \int_0^\infty e^{-\rho\pi r^2} 2\pi\rho r^2 \ \mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

ako v predošlom riešení.

(Mimochodom, všimnite si, že tieto dve riešenia obsahovali veľa rovnakých úvah, líšili sa vlastne len v tom, ako presne sme vyhútali vzorec s exponenciálnou funkciou. Tiež si všimnite, že druhé riešenie je o čosi všeobecnejšie.)

**Integrál** Nakoniec len porátajme integrál, ktorý vyšiel v oboch riešeniach. Môžeme sa s ním popasovať per partes (skúste si!), alebo nám pomôže nejaký matematický softvér, alebo nasledujúca drobná finta. (Nie až taká potrebná, keďže to ide per partes, ale celkom zaujímavá a užitočná, tak si ju ukážeme.) Vieme, že $\int_0^\infty e^{-tr^2} \ \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$. Ak si označíme $f(t) = \int_0^\infty e^{-tr^2} \ \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$, derivovaním všetkých troch strán rovnosti podľa $t$ dostávame

$$f'(t) = \int_0^\infty -r^2 e^{-tr^2} \ \mathrm{d}r = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{t^3}}.$$

(Múdre vety nám hovoria, že za istých podmienok môžeme vymeniť poradie derivácie a integrálu, čiže $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty e^{-tr^2} \ \mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tr^2}) \ \mathrm{d}r$, odkiaľ máme prostredný vzťah.) Vynásobením $-2t$ dostávame

$$\int_0^\infty 2tr^2 e^{-tr^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

no a dosadením $\pi\rho$ za $t$ dostávame hľadanú hodnotu integrálu

$$X = \int_0^\infty 2\pi\rho r^2 e^{-\pi\rho r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}.$$

Výsledková listina FX po tretej sérii.

| # | Riešiteľ | FX1-6 | FX7 | FX8 | FX9 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Filip Kubina | 22 | 5 | 5 | 0.5 | 32.5 |
| 2. | Jan Hermann | 14.5 | 4 | - | 5 | 23.5 |
| 3. | Lukáš Konečný | 14 | - | - | - | 14 |
| 4. | Lucia Simanová | 11.5 | - | - | - | 11.5 |
| 5. | Michal Spišiak | 10 | - | - | - | 10 |
| | Peter Vanya | 10 | - | - | - | 10 |
| 7. | Samuel Hapák | 3.5 | - | - | 5 | 8.5 |
| 8. | Dávid Vendel | 5 | - | - | - | 5 |
| 9. | Ivan Burmister | 1 | - | - | - | 1 |
| | Michal Hojčka | 1 | - | - | - | 1 |
| | Peter Ondáč | 1 | - | - | - | 1 |
| 12. | Zuzana Horváthová | 0 | - | - | - | 0 |
| | Eugen Hruška | 0 | - | - | - | 0 |
| | Barbora Sedlačková | 0 | - | - | - | 0 |
| | Alena Černá | 0 | - | - | - | 0 |