FX [f:ks]

powered by FKS

Vzorové riešenia a výsledky 6. série 3. ročníka

FX16 Vesmír (Opravoval Jakub)

Peťo vyniesol do vesmíru svoju obľúbenú družicu. Družica sa dlho túlala hlbokým vesmírom a dostala sa až do vzdialenosti d od Zeme, keď jej začalo byť smutno a začala vysielať rádiový signál s frekvenciou f. Kubo si chcel naladiť rádio na Peťovu družicu, a tak sa začal zamýšľať nad nasledujúcimi problémami.

(a) *Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak sa družica pohybuje (hoc i veľkou) rýchlosťou v smerom od Zeme?*

(b) *Akú frekvenciu signálu družice nameria Kubo, ak družica stojí, ale vesmír sa rovnomerne rozpína tak, že vzdialenosť medzi družicou a Zemou sa v čase vysielania zväčšuje rýchlosťou v? Rovnomerné rozpínanie vesmíru v tejto úlohe znamená, že objektívna vzdialenosť medzi každými dvoma bodmi sa zväčšuje konštantnou rýchlosťou, pričom v každom momente je rýchlosť vzďaľovania sa dvojice bodov priamo úmerná vzdialenosti týchto bodov.*

Pod rádiovým signálom obyčajne rozumieme elektromagnetickú vlnu, obvykle smerovanú vysielačom prevažne do nejakého želaného priestorového uhla, s vlnovými dĺžkami od približne 1 do 1000 metrov. Samotná informácia sa kóduje pomocou modulácie (superpozícia viacerých monofrekvenčných vĺn a vznik tzv. rázov). Technicky sa jedná o netriviálne záležitosti. Rozobrať takúto situáciu by zrejme bolo nad naše sily a preto sa uchýlime k zjednodušenému myšlienkovému experimentu (Gedankenexperiment) – komunikácia bude prebiehať pomocou elektromagnetického žiarenia vysielaním fotónov[1] z družice v smere priamo k Zemi po dávkach s frekvenciou f. Informáciu budem kódovať pomocou počtu vyslaných fotónov (čiže pomocou amplitúdy, ak sa bavíme v termínoch vĺn).

Časť (a).

Spomínaná rýchlosť družice v môže byť podľa zadania veľká. Tým sme chceli povedať, že môže byť porovnateľná s rýchlosťou svetla – a že teda túto časť treba rozobrať relativisticky. Zrejme ste už počuli

[1] Malo by byť známe, že elektromagnetické javy majú duálny charakter a dá sa uvažovať o elektromagnetických vlnách ako aj o prúde častíc – fotónov.

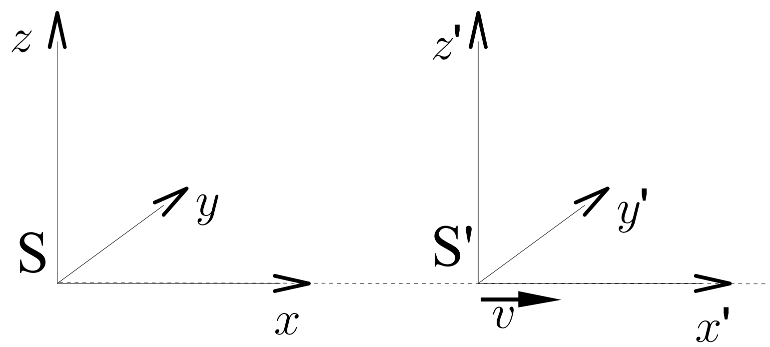
o dilatácii času a kontrakcii dĺžky v špeciálnej teórii relativity. Je to dôsledok špeciálnych Lorentzových transformácií

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned}$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

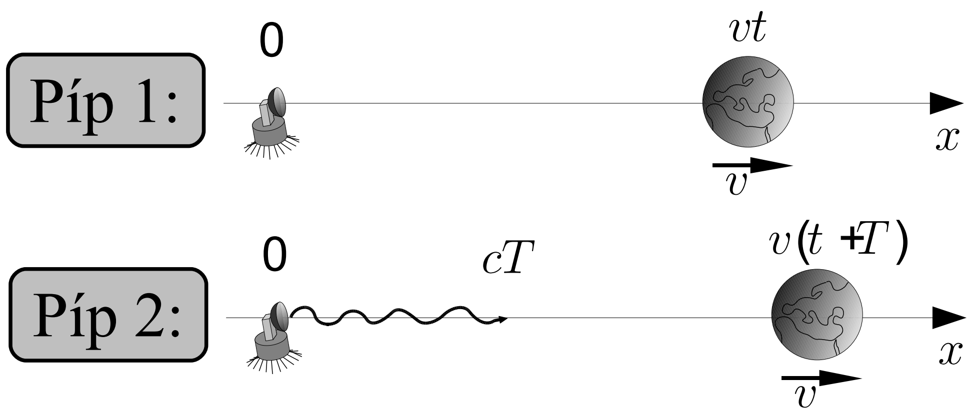
Tieto rovnice nám hovoria, ako sa transformujú súradnice polohy a času pri prechode z inerciálneho systému S s kartézskou sústavou súradníc x, y a z a časom t do inerciálneho systému S' s kartézskymi súradnicami x', y', z' a časom t', ktorého počiatok sa vzhľadom na S hýbe rýchlosťou v v smere kladnej x-ovej polosi. Súradničné osi y' a z' sú rovnobežné s osami y a z, osi x' a x sa prekrývajú, a v čase $t = t' = 0$ sa počiatky oboch sústav prekrývajú.



Tieto vzťahy určujú, kde ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$) a kedy ($t'$) budem v systéme S' pozorovať udalosť, ktorá nastala v systéme S v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a v čase t.

V našom prípade môžeme uvažovať systém S spojený s družicou a S' bude spojený so Zemou[2]. Nech sa teda Zem hýbe od družice rýchlosťou v. Družica vyšle v čase t v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{0}$ prvý signál. V čase $t + T$, kde $T = \frac{1}{f}$, vyšle opäť v mieste $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{0}$ druhý signál.

[2]Tu práve robíme značné zjednodušenie problému, lebo Zem sa nepohybuje rovnomerne! V skutočnosti by sme mali riešiť problém tak, že by sme spočítali, kedy k nám signál priletí, a rýchlosť družice vzhľadom na Slnko by sme mali relativisticky sčítať s rýchlosťou Zeme voči Slnku v danej dobe príletu signálu. V takomto prípade už však ani smer šírenia signálu nemusí byť rovnobežný so smerom vzájomného pohybu družice vzhľadom na Zem v dobe príjmu…



Podľa vyššie napísaných transformačných vzťahov určíme, kedy a kde tieto dve udalosti (pípnutia) nastanú v sústave S'. Pípnutie 1 nastane v čase $t'_1 = \gamma t$ v mieste $\mathbf{r'_1} = (x'_1, y'_1, z'_1) = (-\gamma v t, 0, 0)$. Pípnutie 2 je v sústave S udalosť, ktorá nastane v čase $t'_2 = \gamma v(t+T)$ v mieste $\mathbf{r'_2} = (x'_2, y'_2, z'_2) = (-\gamma v(t+T), 0, 0)$. Teraz nám stačí využiť základný princíp špeciálnej teórie relativity – totiž, že všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si rovnocenné a teda nutne rýchlosť svetla (teda i rýchlosť šírenia nášho signálu) je v každej sústave rovnaká. Spočítame čas τ'_1, kedy doletí prvý signál k Zemi:

$$\tau'_1 = t'_1 + \frac{|\mathbf{r'_1}|}{c} = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right) t.$$

Obdobne zrátame čas príletu druhého signálu τ'_2 a ich rozdiel určí periódu prijímaného signálu

$$T' = \tau'_2 - \tau'_1 = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right) T = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T.$$

Potom prijímaná frekvencia je

$$f' = \frac{1}{T'} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f.$$

Časť (b).

Najprv si obrazne vyjasníme, čo to vlastne rozpínanie vesmíru je. Pod rozpínaním vesmíru sa myslí, že samotný priestor sa „nafukuje“. Ak chceme takéto „nafukovanie“ pozorovať, tak zrejme potrebujeme niečo, čo svoju dĺžku v takomto podivnom svete nemení. Napríklad pevnú tyč. Takže ak máme 2 rôzne body[3] A a B v priestore, tak môžeme určiť ich vzájomnú vzdialenosť pomocou nejakého počtu tyčí,

[3]Ak sa čitateľovi body nepáčia, tak si do nich môže umiestniť nejaké telesá. Tieto telesá však musia byť jedno vzhľadom na druhé v pokoji, nehybné.

ktoré poukladáme do rovného radu[4] jednu vedľa druhej. Po istom čase sa náš priestor „nafúkne“ a to v každom mieste rovnako. Teda v každej skulinke medzi atómami pribudne kúsok „nového“ priestoru. Avšak očakávame, že fyzika bude fungovať rovnako ako v súčasnosti, takže atómy sa posnažia, aby sa ich vzdialenosti nemenili. Potom sa ale nebudú meniť ani dĺžky tyčí. Zákonite ale teda všetok pribudlý priestor objavíme medzi tyčami, ktoré sa postupom času budú rozchádzať. Keď ich znovu dáme do radu tak, aby začínali v bode/telese A, tak nám zrejme bude chýbať niekoľko tyčí pri B. Doplnením môžeme zistiť, o koľko sa vzdialenosť $|AB|$ zväčšila za uplynulý čas. Vieme tak určiť „rýchlosť pribúdania priestoru medzi bodmi A a B“, ktorú v zadaní označujeme v. Tu by som ale zdôraznil, že nejde o rýchlosť v pravom slova zmysle. Telesá v bodoch A a B sa navzájom nehýbu[5]. Len priestor medzi nimi pribúda! Kvôli pribúdaniu priestoru sa pojem rýchlosti mimo počiatku systému komplikuje, pribúda akýsi *drift* spôsobený rozpínaním. V takomto prípade bude rovnocennosť inerciálnych sústav iba lokálna – teda rýchlosť svetla bude c iba v počiatku danej sústavy[6].

Prenos signálu môžeme teda uvažovať tak, že letiaci fotón sa bude vždy vzhľadom na miesto, kde sa nachádza, pohybovať rýchlosťou c, a súčasne sa priestor pred a za ním bude rozpínať. Keď signál doletí na Zem, už nemusíme použiť transformácie súradníc a času známe zo špeciálnej teórie relativity, tak, ako sme ich použili v predošlej časti pri prechode z jednej vzťažnej sústavy do druhej[7].

Meranie vzdialenosti pomocou pevných tyčí budem považovať za spôsob určenia tej v zadaní spomenutej objektívnej vzdialenosti. Spôsob, ako ich poukladať do rovného radu, vyriešim elegantne tak, že budú duté a ich stredom pôjde laserový lúč z A do B. Keďže uvažujeme tzv. plochý priestor[8], tak sa svetlo bude šíriť rovno v zmysle

[4]Význam slova *rovno* môže byť v krivých priestoroch odlišný od toho, čo považujeme za rovno my. Vo všeobecnej teórii relativity sa za rovno považuje smer, akým sa šíri svetlo. No, ale v blízkosti masívnych hmotných objektov sa smer šírenia svetla zakrivuje, ako keby padalo na ne. Ide o tzv. *gravitational lensing*, čiže akési gravitačné šošovkovanie, lebo masívny objekt funguje pre svetlo fakticky ako spojná šošovka.

[5]Vo svojej podstate ide o všeobecno-relativistický problém, ktorý sa rieši zavedením tzv. *comoving* súradníc. Tieto sa rozpínajú presne podľa škálovacieho parametra $a(t)$ a objekty iba unášané priestorom sú v nich nehybné.

[6]Ak by mal niekto problém s tým, že potom sa svetlo vzhľadom na zdroj môže časom „hýbať“ rýchlejšie ako c, tak toho môžem „utešiť“, že vo všeobecnej teórii relativity to nie je na skok z mosta…

[7]Skúsim laicky načrtnúť, ako vnímam ja, prečo netreba transformovať súradnice, ale je to len moja naivná predstava neznalca všeobecnej teórie relativity. V prípade špeciálnej teórie relativity sú neobvyklé transformácie súradníc a času dôsledkom toho, že svetlo sa hýbe vzhľadom na ľubovoľného pozorovateľa rýchlosťou c, a to aj vtedy, keď sú títo pozorovatelia vo vzájomnom pohybe. V tomto prípade žiaden takýto „klasický nezmysel“ nenastáva, lebo uvažujeme fotón, ktorý sa hýbe vzhľadom na miesto, kde sa nachádza, rýchlosťou c.

[8]To znamená, že nie je zakrivený, čo je ekvivalentné tomu, že platí $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, čo je

nám bežne známom. Naše meranie je síce ťažko prevediteľné, ale nám ide len o fyzikálne realizovateľnú konštrukciu. Vďaka tomu sme nášmu pojmu objektívnej vzdialenosti dali solídny základ.

Teraz spracujeme informáciu zo zadania o rovnomernosti rozpínania, ktorá je kvalitne zašifrovaná. Tvrdíme, že vzdialenosť každých dvoch bodov sa zväčšuje konštantnou rýchlosťou (konštantnou v čase!), a že rýchlosť vzďaľovania je (v každom danom momente) priamo úmerná vzdialenosti. Tu, žiaľ, chýba informácia, že konštanta úmernosti je univerzálna pre celý vesmír, čo sa však snáď dalo domyslieť z prívlastku rovnomerný. Konverzia tohoto slovného labyrintu do reči vzorcov je na počudovanie veľmi príťažlivá

$$L(t) = L(t_0) + H_0(t - t_0)L(t_0) = a(t)L(t_0).$$

Sami sa môžete presvedčiť, že tento vzťah dáva naozaj v čase konštantú rýchlosť vzďaľovania sa, a tiež priamu úmeru rýchlosti od vzdialenosti pre ľubovoľný zvolený čas. Veličina $a(t) = 1 + H_0(t - t_0)$ sa nazýva škálovací parameter. Udáva, koľkokrát sa natiahla vzdialenosť L medzi časmi t_0 a t. V našom jednoduchom modeli je to lineárna funkcia času t. Konštanta označená symbolom H_0 má dolný index 0, lebo ide o prvú deriváciu $a(t)$ podľa času vyjadrenú v čase t_0.[9] Písmenko H si zaslúži vďaka jej objaviteľovi, je to totiž Hubblova konštanta. Udáva rýchlosť, s akou rastie vzdialenosť, na jednotku dĺžky v čase t_0.[10]

V našom prípade teda platí $v = H_0 d$ a časový vývoj objektívnej vzdialenosti družice od Zeme je daný rovnicou $d(t) = d + vt$, v ktorej za čas $t = 0$ považujem okamih, ktorý je v zadaní popísaný ako čas začatia vysielania. Môžeme napísať rovnicu, ktorá bude popisovať, ako sa šíri signál rýchlosťou svetla od družice k Zemi.[11] Nech $r(t)$ je objektívna vzdialenosť signálu (vypusteného družicou v čase $t = 0$ smerom k Zemi) od družice. Potom platí diferenciálna rovnica

$$\dot{r}(t) = c + \frac{r}{d + vt}v, \tag{i}$$

ktorá hovorí, že rýchlosť narastania objektívnej vzdialenosti signálu od družice je súčet rýchlosti svetla c a rýchlosti narastania objektívnej

Pytagorova veta pre diferenciály v 3-dimenzionálnom priestore.

[9] V našom prípade ide o prvú časovú deriváciu a v ľubovoľnom čase, ale ak uvažujeme komplivanejšiu funkciu $a(t)$, tak potom to už jedno nemusí byť. V reáli je funkcia $a(t)$ naozaj komplikovanejšia.

[10] Pre predstavu uvediem hodnotu Hubblovej konštanty v nami pozorovanom vesmíre v súčasnosti: $H_0 = (71 \pm 3{,}5)\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}$, kde $\mathrm{Mpc} = 10^6\mathrm{pc} \approx 3{,}26.10^6\mathrm{ly}$. [pc je značka pre jednotku dĺžky *parsek*, čo je skrátenina od slovného spojenia *paralaxa 1 oblúkovej sekundy* – viď Wikipédia – a ly je značka pre svetelný rok, *light year*.]

[11] Mimochodom, formálne presne rovnako vyzerá príklad z kuchyne pána Ľubomíra Muchu o muche, ktorá kráča rýchlosťou u po ideálnej gume. Začína liezť od steny, o ktorú je gumička prichytená. Muche to však náležite sťažíme tým, že druhý koniec gumy ťaháme konštantnou rýchlosťou v preč od steny. Otázka je, za akých podmienok príde mucha na kraj gumy, ktorý ťaháme, a koľko jej to bude trvať.

vzdialenosti medzi družicou a signálom. Podmienka vyjadrujúca kedy signál dorazí na Zem je zrejme

$$r(t) = d + vt.$$

Nuž, popravde, zapísané v týchto súradniciach to vskutku vyzerá nevábne. Veď len tak bez riešenia ani nevieme povedať, či signál niekedy k Zemi vôbec dorazí. Hop? Ale to by sme mohli vedieť! Uvažujme súradnicu $x(t) = \frac{r(t)}{d+vt}$, ktorá vyjadruje, v akej časti cesty od družice k Zemi sa nachádza signál v čase t. Vďaka rovnomernosti rozpínania priestoru sa zrejme časť za družicou nafúkne úmerne svojej objektívnej dĺžke a časť pred družicou tiež – teda samotné rozpínanie priestoru nespôsobuje zmenu $x(t)$. V premennej $x(t)$ dostaneme rovnicu

$$\mathrm{d}x = \frac{c\,\mathrm{d}t}{d+vt} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}(t) = \frac{c}{d+vt}, \tag{ii}$$

ktorá hovorí, že jediná časová zmena v súradnici $x(t)$ je spôsobená vlastným pohybom signálu rýchlosťou c. Podmienka vyjadrujúca kedy signál dorazí na Zem je jednoducho

$$x(t) = 1.$$

Prechod od rovnice (i) k rovnici (ii) sa nazýva transformácia premenných v diferenciálnej rovnici a všeobecne sa teší obrovskej popularite v druhom semestri analýzy :-).[12]

Každopádne, naša rovnica (ii) je separovateľná, čo znamená, že riešenie vieme ľahko nájsť jej integrovaním cez čas od $t = 0$ po T, čo bude čas príletu signálu na Zem

$$\int_0^T \dot{x}\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{c}{d+vt}\mathrm{d}t.$$

Integrál vľavo je rovný 1, lebo signál za čas letu k Zemi prejde práve celú cestu od družice k Zemi. Integrál vpravo sa dá riešiť substitúciou $z = d + vt$ a je rovný $\frac{c}{v}\ln\frac{d+vT}{d}$. Z toho máme vyjadrenie pre čas letu

$$\begin{aligned} T = \frac{d}{v}\left(e^{v/c} - 1\right) &= \frac{d}{v}\left[\frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{d}{c}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c} + \dots\right]. \end{aligned}$$

[12] Náš postup prechodu k novej súradnici bol intuitívny, lebo sme chápali význam našich súradníc. Ak však človek stojí zoči-voči nejakej diferenciálnej rovnici a má v nej previesť transformáciu premenných (matematické cvičenia nie sú oveľa nápaditejšie ako toto…), tak je to niečo celkom iné. Potom už príde na invariantnosť tvaru prvých diferenciálov…

Keď už vieme, aký čas potrebuje signál na prílet na Zem, tak sa môžeme konečne začať zaoberať zmenou frekvencie vyslaných pulzov. V čase $t = 0$ sme vypustili jeden signál a ten na Zem dorazil v čase T_1. Družica vysiela s frekvenciou f, takže nasledovný signál vyšle v čase $\tau = f^{-1}$. Ten dorazí podľa predošlých výpočtov[13] na Zem v čase

$$T_2 = \frac{d}{v}\left(e^{v/c} - 1\right) + \tau e^{v/c}.$$

Na Zem priletia tieto dva signály v časovom rozostupe

$$\tau' = T_2 - T_1 = \tau e^{v/c}.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že k-ty pulz vyslaný družicou v čase $t = k\tau$ dorazí na Zem skutočne o čas $k\tau'$ neskôr po nultom signáli. Prijímaná frekvencia na Zemi preto bude

$$f' = fe^{-v/c} = f\left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots\right].$$

Náš výsledok vychádza v zhode s vlnovou predstavou. Ak sme družicou vyslali fotón s vlnovou dĺžkou λ v čase t a tento priletí na Zem v čase T, tak bude mať vlnovú dĺžku $\lambda' = \frac{a(T)}{a(t)}\lambda$. To odpovedá jednoducho preškálovaniu vlnovej dĺžky fotónu podobne ako sa škálujú objektívne vzdialenosti. Pre frekvencie dostaneme vzťah[14] $f' = f\frac{1+H_0 t}{1+H_0 T}$, čo pre naše $t = k\tau$ a k nim príslušné vypočítané hodnoty T vypľuje zhodný vzťah.

Malé zhrnutie a porovnanie posunov frekvencií (nielen súvisiacich s týmto príkladom):

- **Nerelativistický Dopplerov efekt**
  Funguje pre vlnenia v prostredí s rýchlosťou šírenia vzruchu c_0 oveľa menšou ako rýchlosť svetla c. Ak u je rýchlosť detektora vzhľadom na prostredie v smere od zdroja a v je rýchlosť zdroja vzhľadom na prostredie v smere od detektora, tak platí

$$\begin{aligned} f' &= f\frac{1 - \frac{u}{c_0}}{1 + \frac{v}{c_0}} \\ &= f\left[1 - \frac{v+u}{c_0} + \frac{(v+u)v}{c_0^2} - \frac{(v+u)v^2}{c_0^3} + \dots\right]. \end{aligned}$$

[13]Zmena nastane jedine v hraniciach integrovania $0 \mapsto \tau$, resp. $T \mapsto T_2$.

[14]Príslušný efekt sa zvykne označovať ako kozmologický červený posun. Prívlastok červený má historické korene. Ide o to, že známe okom viditeľné spektrálne čiary sa pri pozorovaní vzďaľujúceho sa zdroja elektromagnetického žiarenia posúvajú k červenej farbe, ktorá má spomedzi žiarenia, ktoré vidíme, najnižšiu frekvenciu. Podobne to funguje, ak medzi zdrojom a nami pribúda priestor.

- **Relativistický Dopplerov efekt**
  Pre vlny šíriace sa rýchlosťou svetla a zdroj vzďaľujúci sa od nás (detektor) rýchlosťou v platí
  $$\begin{aligned} f' &= f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= f\left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots\right]. \end{aligned}$$

- **Kozmologický posun**
  Pre žiarenie emitované v čase t a prijímané v čase t' platí vo všeobecnosti posun (viď vlnová predstava na rozpínanie vlnovej dĺžky λ o čosi vyššie)
  $$f' = f\frac{a(t)}{a(t')}.$$
  Pre linearizovaný škálovací parameter $a(t) = 1 + H_0(t - t_0)$ sme vypočítali, že prijímaná frekvencia signálu vyslaného v ľubovoľnom čase z miesta, ktoré malo v čase t_0 objektívnu vzdialenosť d, bude
  $$\begin{aligned} f' &= fe^{-H_0 d/c} \\ &= f\left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots\right]. \end{aligned}$$

- **Gravitačný červený posun**
  Pre žiarenie emitované z povrchu hmotného sféricky symetrického objektu o hmotnosti M a polomere R platí (dá sa naň prostonaivne prísť zo zákona zachovania energie pre fotón, ktorému prisúdim hmotnosť $m = E/c^2 = hf/c^2$)
  $$f' = f\left[1 + \frac{1}{c^2}\frac{GM}{R}\right].$$

Na záver by som povedal niečo o našich predstavách o vesmíre. Podľa štandardného modelu sa vesmír rozpína (pričom aktuálnu hodnotu Hubblovej konštanty som uviedol už vyššie) a toto svoje rozpínie zrýchľuje (teda funkcia $a(t)$ má aj vyššie ako lineárne členy). Tento prekvapivý fakt má mať na svedomí tzv. *tmavá energia*[15], ktorá má záporný tlak. Ďalej sa predpokladá, že rýchlosti vzájomného pohybu

[15] Okrem toho, že vieme, akú hustotu by približne mala mať, o nej nevieme skoro nič. Pôvodne šlo o dodatočný člen v Einsteinovej rovnici vo všeobecnej teórii relativity. Dnes ho ľudia zapracuvávajú do celkovej hustoty energie a hovoria o tmavej energii.

sú vo vesmíre neveľké (rádovo na úrovni 1000 km/s) a preto na veľkých vzdialenostiach[16] je červený posun dominantným efektom nafukovania priestoru – čiže kozmologického charakteru – poprípade kombinovaný s gravitačným posunom (ten je významný u hviezd s veľkou hustotou, napr. bielych trpaslíkov).

FX17 Optika (Opravoval Bzdušo)

Maťo si minule kúpil optické vlákno dĺžky L a konečne si svoj počítač na intráku pripojil priamo ku serveru FKS. Jadro optického vlákna je dlhý valec polomeru r vyrobený zo skla s rôznymi prímesami tak, aby sa rýchlosť šírenia svetla v ňom zvyšovala lineárne so vzdialenosťou od jeho osi. Index lomu v strede je n_1, na kraji n_2. V strede jednej jeho podstavy je bodový zdroj svetla, ktorý vyšle krátky svetelný impulz. Akú dĺžku trvania bude mať impulz prijatý na druhom konci optického vlákna? Rádové zanedbania sú prípustné, typické hodnoty veličín sú $L = 1\ km$, $r = 20\ \mu m$, $n_1 = 1.445$, $n_2 = 1.44$.

Pokiaľ by som svetelný lúč pustil presne v smere osi vlákna, čas za ktorý príde na opačný koniec by bol L/v_0, kde $v_0 = c/n_1$ (rovnako ako v celom ďalšom riešení) označuje rýchlosť svetla v strede vlákna. Absolútna presnosť sa však nedá dosiahnuť[17] a nezabránime skutočnosti, že svetlo vojde do vlákna s istým rozptylom. Lúče, ktoré vchádzajú dovnútra pod nenulovým uhlom, budú na dosiahnutie opačného konca vlákna potrebovať viac-či-menej odlišný čas. Pointou tejto úlohy je určiť, o koľko najviac sa môže nejaký lúč omeškať alebo predbiehať v porovnaní s priamo idúcim lúčom. Vopred podotknem prekvapivý výsledok, že všetky odchýlené lúče ho predbehnú.

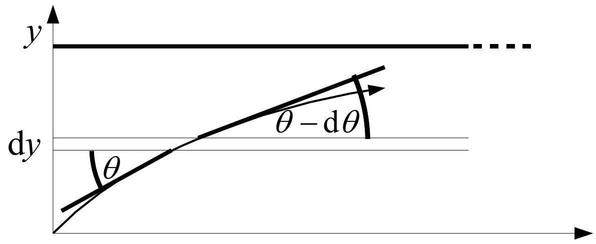
Na začiatok pár uvažovaných predpokladov:

- **Optické vlákno je rovné:** Vzhľadom na to, že aj poskrúcané optické vlákno má polomer krivosti rádovo väčší ako je jeho priečny rozmer, výsledky by sa líšili až na vzdialenej platnej číslici.
- **Svetlo, ktoré dosiahne povrch optického vlákna sa pohltí:** Zadanie to síce explicitne nespomína, skutočné vlákna sú však urobené tak, aby sa takto sa odrážajúce svetlo naozaj po prejdení krátkej dráhy úplne pohltilo alebo uniklo von.

Označme uhol, pod ktorým lúč vojde stredom podstavy do vlákna ako α.[18] Svetlo sa postupne dostáva do miest s čoraz menším indexom

[16] O kozmologických vzdialenostiach hovoríme, ak majú veľkosť rádovo aspoň 100 Mpc.
[17] Či už kvôli Parkinsonovi alebo kvôli Heisenbergovi… :-)
[18] Myslí sa uhol na vnútornej strane valca, tzn. už je zahrnutý lom svetla, ktorý na podstave nastal.

lomu, kvôli čomu sa bude zakrivovať jeho smer do čoraz plytšieho uhlu. V istej vzdialenosti sa dokonca môže stať, že lúč sa pohybuje rovnobežne s osou valca. Hoci sme ho tak neposlali! A prekvapivý fakt je, že sa potom začne vracať naspäť k osi valca. Pokúsime sa teraz presnú skutočnosť odvodiť z rovníc.



Mechanizmom zakrivovania lúča nie je nič iné, iba Snellov zákon lomu. Optické vlákno si budeme predstavovať ako obrovské množstvo vrstiev s hrúbkou dy, ktoré sa navzájom líšia indexom lomu o malé hodnoty dn. Keď bude svetlo prechádzať z jednej vrstvy na druhú, nastane lom podľa vzťahu

$$\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}.$$

Pokiaľ svetlo prechádza N vrstvami, pre každý prechod platí analogický vzťah. Vynásobením všetkých rovníc dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}\cdot\ldots\cdot\frac{\cos\theta_{N-1}}{\cos\theta_N} &= \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_3}{n_2}\cdot\ldots\cdot\frac{n_N}{n_{N-1}}\\ \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_N} &= \frac{n_N}{n_1}.\end{aligned}$$

Takže ak chceme zistiť, pod akým uhlom sa šíri svetlo v nejakej vzdialenejšej vrstve, stačí ju porovnať priamo s prvou, kde svetlo vstupovalo pod uhlom α, a nemusíme sa zaujímať o indexy lomu v prostredných vrstvách (za predpokladu, že tieto svetlu dovoľujú dostať sa až do tej poslednej).

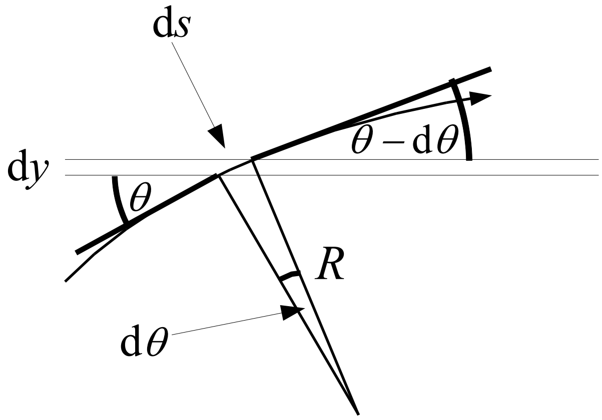
Teraž už presne vieme, o aké lúče sa budeme v riešení zaujímať. Aby neboli na povrchu pohltené, musia sa už na ňom (alebo skôr, my budeme skúmať práve hraničný prípad) pohybovať pod nulovým uhlom, tzn.

$$\begin{aligned}\cos\alpha_m &= \frac{n_2}{n_1}\\ \alpha_m &\approx 4,77^\circ.\end{aligned}$$

Ak sa teraz rozhodneme počítať hľadaný čas, oplatilo by sa nám poznať trajektóriu lúča. A vychádzali by nám škaredé rovnice, keby sme si neuvedomili nasledujúci fakt, ktorý vzápätí dokážeme:

Lema: ***Dráha každého lúča je vyskladaná z kružnicových oblúkov, ktoré začínajú a končia na osi valca.***

Dôkaz: Pripomeňme si predošlý obrázok, teraz v trochu inom svetle:



Označme polomer krivosti v nejakom konkrétnom mieste ako R. V tomto mieste máme tiež tenkú vrstvičku hrúbky dy, do ktorej svetlo vstupuje pod uhlom θ rýchlosťou v a vychádza z nej pod o niečo menším uhlom $\theta - \mathrm{d}\theta$ a o niečo väčšou rýchlosťou $v + \mathrm{d}v$. Platí:

$$\frac{\cos\theta}{\cos(\theta - \mathrm{d}\theta)} = \frac{v}{v + \mathrm{d}v}$$

(Ide len o trochu upravený Snellov zákon) Rovnicu vynásobíme menovateľmi oboch zlomkov, použijeme súčtový vzorec $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ a potom aproximácie pre limitne malé uhly $\sin \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$ a $\cos \mathrm{d}\theta = 1$. Dostaneme:

$$\cos\theta \mathrm{d}v = v \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

O rýchlosti v je zadané, že sa so vzdialenosťou mení lineárne. Je teda popísaná vzťahom $v = v_0 + ky$, kde dosadením $y = 0$, resp. $y = r$ možno určiť konštanty:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{c}{n_1} \\ k &= \frac{c}{r}\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right). \end{aligned}$$

My do našej rovnice potrebujeme diferenciál rýchlosti, pre ktorý zrejme platí d$v = k$dy, čím sa naša rovnica transformuje na

$$\cos\theta k \mathrm{d}y = v \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

Zároveň však z jednochej geometrie (pre kružnicový oblúk resp. pravouhlý trojuholník) vyplývajú rovnice:

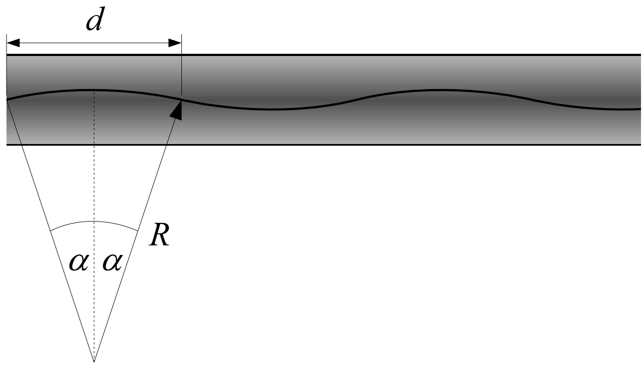
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \mathrm{d}y/\sin\theta \\ \mathrm{d}s &= R\mathrm{d}\theta \end{aligned}\right\} \implies \mathrm{d}y = R\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Dosadením do našej rovnice dostávame po malej úprave

$$R = \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{\cos\theta} = \frac{1}{k} \cdot \frac{v_0}{\cos\alpha} = \text{konštanta},$$

kde sme si úpravu pomocou rýchlosti v strede v_0 a vstupného uhla α mohli dovoliť vďaka zákonu lomu. Ako vidíme, polomer krivosti lúča nezávisí na vzdialenosti od stredu vlákna a bude teda celý čas konštantný. [19] Koniec dôkazu.

Treba si uvedomiť, že tento fakt platí iba vďaka lineárnej závislosti rýchlosti od vzdialenosti. Pri akejkoľvek inej (napr. lineárna závislosť indexu lomu od vzdialenosti) by to už bol iba približný. Teraz platí *presne*. Označme dĺžku jedného oblúka ako d.



Z ľahkej geometrie a pomocou už získaného vzťahu pre polomer dostávam:

$$d = 2R\sin\alpha = \frac{2v_0}{k}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Prejdime konečne k samotnému času. Skúšaním zisťujeme, že najľahšie je skúmať, za aký čas prejde svetlo úsek dθ kružnicového oblúka.[20] To potrvá čas

$$\mathrm{d}t = \frac{R\mathrm{d}\theta}{v} = \frac{R\mathrm{d}\theta\cos\theta}{v\cos\theta} = \frac{R\mathrm{d}\theta\cos\alpha}{v_0\cos\theta}$$

Zrejme prvú polovicu oblúka prejde lúč za rovnaký čas, ako druhú, takže

$$t = 2\int_0^{\alpha} \frac{R\mathrm{d}\theta\cos\alpha}{v_0\cos\theta}.$$

To vyzerá ako *dosť škaredý integrál.* Možno ho riešiť substitúciou $\mathrm{tg}(\theta/2) = t$. O niečo krajší je integrál typu $\mathrm{d}x/\sin x$. Rozmyslite si,

[19] Ostáva samozrejme otvorená otázka, prečo sa lúč neostane pohybovať vodorovne, ale po dosiahnutí najväčšej vzdialenosti bude pokračovať v pohybe po tej istej kružnici. Pozri si poznámku 4 na konci vzorového riešenia.

[20] Postup cez dx vedie k matematickým komplikáciám. Rozumný spôsob ako spočítať vzniknutý integrál by nás po substitúciách aj tak doviedol k uhlom.

prečo platí[21]

$$\int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

Pomocou tejto zámeny dostávame:

$$t = \frac{2R\cos\alpha}{v_0} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{k} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta},$$

pričom primitívna funkcia k funkcii za integrálom je $\ln|\,\mathrm{tg}\,(\theta/2)\,| + C$.[22] S týmto poznatkom môžeme pre čas prejdenia jedného kružnicového oblúka napísať

$$t = \frac{2}{k} \ln \left| \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \right| = -\frac{2}{k} \ln \left| \,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

Takýchto oblúkov musí lúč prejsť L/d, takže celkový čas prislúchajúci lúču vstupujúcemu pod uhlom α je:

$$T = \frac{L}{d} t = -\frac{L}{v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha} \ln \left| \,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right|$$

Táto funkcia uhlu α je pre malé uhly klesajúca. Najkratší čas preto prislúcha maximálnemu uhlu α_m, ktorý sme už určili. To je explicitné riešenie. Aby sme sa však presvedčili, že skutočne ide o klesajúcu funkciu, spravme nejké priblíženie pre malé uhly. Existuje veľa ciest, ja som zvolil nasledovnú. Platí súčtový vzorec:

$$\mathrm{tg}\,(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y},$$

a ak si dosadíme $x = \pi/4$ a $y = -\alpha/2$, dostaneme

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\alpha/2}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha/2}.$$

[21] Nakreslite si obrázok. Rozmyslite si zároveň, prečo platí všeobecnejšie tvrdenie

$$\int_0^{\alpha} f(\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta,$$

kde f je ľubovoľná slušná funkcia.

[22] Dá sa k tomu prísť univerzálnou trigonometrickou substitúciou $t = \mathrm{tg}\,\theta/2$. Pre diferenciál platí

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,t \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

a pre $\sin\theta$ môžeme odvodiť

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Samotný integrál sa potom zráta nasledovne: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\,\mathrm{tg}(\theta/2)| + C$.

To nám umožňuje prepísať si logaritmus nasledovne:

$$\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\ln\left(\frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}\right)=\ln\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)-\ln\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

Z Taylorovho rozvoja pre logaritmus

$$\ln(1\pm x)=\pm x-x^2/2\pm x^3/3-x^4/4+\ldots,$$

kde pre dostatočne malé x môžeme všetky členy okrem prvých troch zanedbať,[23] môžeme náš výraz upraviť takto:[24]

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)-\ln\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)&=\left(-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}-\ldots\right)\\&\quad-\left(-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}+\ldots\right)\\&\approx-2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Ak si pomocou súčtového vzorca rozložíme aj $\mathrm{tg}\,\alpha$ vo výraze pre čas, dostávame

$$\begin{aligned}T&\approx\frac{L}{v_0}\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}\right)=\\&=\frac{L}{v_0}\left(1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\right)\approx\\&\approx\frac{L}{v_0}\left(1-\frac{2}{3}\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Tu je už klesajúci charakter času jasne zreteľný. **Lúč, ktorý nejde priamo, ale po kružnicových oblúkoch, príde na koniec vlákna za kratší čas.** S ďalším priblížením[25] $\mathrm{tg}\,\alpha/2\approx\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$ dostaneme

$$\Delta T\approx\frac{L}{6v_0}\mathrm{tg}^2\,\alpha_m=\frac{L}{6v_0}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha_m}{\cos^2\alpha_m}=\frac{L}{6v_0}\cdot\frac{n_1^2-n_2^2}{n_2^2},$$

pričom sme využili už skôr odvodený vzťah $\cos\alpha_m=n_2/n_1$. Ak ešte dosadíme $v_0=c/n_1$, a zavedieme $\Delta n=n_1-n_2$, dostávame prakticky rovnako presný výsledok

$$\Delta T\approx\frac{L}{3c}\Delta n\approx 5{,}5\cdot 10^{-9}\mathrm{s}.$$

[23] Keby sme ich zanedbali menej, tak by sme dostali výsledok nezávisiaci od uhla α, čo je zrejme nedostatočná presnosť výsledku.

[24] Áno, konečne sme sa dočkali aj prvého matematického zanedbania. Úlohy by sme vedeli spočítať aj bez neho, ale zadanie to od nás nežiadalo, a výsledné vzťahy by boli prinajmenšom hnusné.

[25] Je zaujímavé, že takéto priblíženie sme nemohli urobiť skôr. Komplikoval nám to súčet prvej a tretej mocniny tejto funkcie. Premyslite si to.

Takto to je. Pre úplnosť riešenia nasleduje ešte niekoľko poznámok.

Poznámka 1: Zadanie požadovalo len rádový odhad, nie explicitný výsledok. Ten sa samozrejme dal získať omnoho jednoduchšie tým, že by sme nejaké zanedbania spravili omnoho skôr. Napríklad sme mohli integrál $\int \mathrm{d}\theta/\cos\theta$ nahradiť integrálom $\int(1+\frac{\theta^2}{2})\mathrm{d}\theta$.

Úloha sa tiež dala riešť aj bez poznatku, že sa lúč pohybuje po kružnicových oblúkoch. Potom by sme zrejme integrovali čas po úsekoch $\mathrm{d}x$, kde sa po istých priblíženiach dal získať rovnako presný výsledok. Každopádne je tento pohyb po oblúkoch celkom zaujímavý jav na to, aby sme naň upozornili.

Poznámka 2: Predstavte si, že by ste optickým vláknom vysielali napríklad morzeovku v podobe svetelných impulzov. Aby boli signály na opačnom konci rozlíšiteľné, museli by byť vysielané bodky resp. čiarky oddelené dostatočne dlhou medzerou. Vzniknutý rozptyl svetla teda obmedzuje množstvo informácie, ktorá môže prejsť vláknom za daný čas. V praxi sa samozrejme nepoužíva morzeovka, ale pri podobných technikách sú obmedzenia analogické. Ak uvážime, že impulz zodpovedajúci jednému bitu informácie musí trvať rádovo aspoň čas ΔT (inak by sa susedné bity zlievali kvôli rozptylu), dostávame teoretické maximum pre prenosovú rýchlosť v rádoch stoviek megabitov za sekundu.

Poznámka 3: Každá slušná funkcia je na dostatočne malom úseku dostatočne lineárna. Preto napríklad aj rýchlosť svetla vo vzduchu v závislosti na výške možno považovať za lineárnu funkciu. To znamená, že aj svetlo v atmosfére sa v skutočnosti pohybuje po kružnicových oblúkoch. Ich polomer je však niekoľko desiatok tisíc kilometrov. Je to síce malé zakrivenie, ale vďaka takémuto lámaniu svetla vidíme slnko na oblohe o kúsok vyššie, než v skutočnosti je. Tento jav je najvýraznejší keď je slnko nízko nad obzorom. Keď by jeho dolnú časť nemalo byť vidno, stále je v nejakej výške nad obzorom a Slnko sa javí sploštené. Inak povedané, vďaka tomuto javu trvá deň o niečo dlhšie, než by trval bez atmosféry.

FX18 Numerika v skúmavke (Opravoval Tomáš)

Evka sa na biológii rada hrá so skúmavkami, minule napríklad do skúmavky tvaru valca s polomerom 1 cm *naliala vodu a pozorovala, aký tvar bude mať jej povrch. Nájdite kontaktný uhol medzi povrchom vody a sklom, tiež nájdite celkové prevýšenie hladiny vody na kraji a v strede skúmavky, a nakreslite tvar jej povrchu. Povrchová energia rozhrania voda-vzduch je* $70\,\mathrm{mJ.m^{-2}}$, *energia rozhrania voda-sklo* $40\,\mathrm{mJ.m^{-2}}$ *a energia rozhrania sklo-vzduch* $100\,\mathrm{mJ.m^{-2}}$. *Číselné výsledky úplne stačia.*

Aby som citoval pána všeobecne uznávaného fyzika Filipa K.: „Nakódim si to v pascale“. Získať analytické riešenie v tomto prípade totiž nie je jednoduché. Najprv si úlohu trocha sformalizujeme. Že situácia bude stredovo symetrická je nad Slnko jasnejšie. Nech teda $f(r)$ vyjadruje výšku vody vo vzdialenosti r od stredu, pričom nulu kladieme na úroveň vody, ktorá by v skúmavke bola nebyť vypuklosti, či skôr vpuklosti vody. Tento stav (rovná voda) budeme považovať za referenčný aj pri rátaní energií. Každý hneď vidí, že v porovnaní s týmto stavom má sústava energiu:

$$\begin{aligned}\Delta E =& 2\pi R f(R)(\sigma_{vs}-\sigma_{sa}) + \int_0^R 2\pi r f(r)\frac{f(r)}{2}\rho g\ \mathrm{d}r\\ &+ \int_0^R 2\pi r\sqrt{1+f'(r)^2}\sigma_{va}\ \mathrm{d}r,\end{aligned}$$

kde σ_{xy} je povrchová energia rozhrania medzi x a y (v-voda, s-sklo, a-air), R je polomer skúmavky a ρ hustota vody.

Tento vrcholne nepedagogický krok (grcný vzorec nám len tak padol z neba) skúsim trochu zjemniť miernym dovysvetlením jednotlivých členov. Prvý člen vyjadruje zmenu energie vnútorného povrchu skúmavky (pri zdvihnutí vody sa časť vzduchu "nahradí" vodou). Druhý člen predstavuje zmenu potenciálnej energie ktorú dostaneme ako integrál cez veľmi uzučké medzivalčia (polomer takéhoto medzivalčia je r, šírka dr výška $f(r)$ a jeho ťažisko sa nachádza v polovici jeho výšky, čiže $f(r)/2$. Posledný člen ráta povrchovú energiu voda-vzduch, idea rozsekaní na medzivalčia je stále živá, akurát sa lepšie pozrieme na ich hornú podstavu, ktorá nie je rovná ale šikmá. Tangens našikmenia θ je akurát derivácia funkcie f a trocha goniometrie nám umožňuje zrátať kosínus tohto uhla. Skutočný povrch hornej „podstavy“ medzivalčia bude potom $2\pi r$ vynásobené $r/\cos\theta$. Na záver podotknime, že aby ΔE bola skutočne rozdeielom energií oproti referenčnému stavu, mali by sme ešte od nej odčítať energiu voda-vzduch v referenčnom stave. Toto je však konštanta a teda na minimalizáciu ΔE (za chvíľu sa k tomu dostaneme) nemá zmysel.

Našou úlohou je teda nájsť také f, pre ktoré vyjde ΔE minimálne. Na toto existuje parádna vec, ktorá sa volá tuším variačný počet a na fyzike na matfyze vás ju naučí v druhom ročníku Fecko. Na FKS na seminári pre drsňákov vás ju možno naučí aj Kulich. Problém s touto metódou je ten, že sa jedná vlastne o problémy dva. Menovite

- Prvý problém: Väčšina z vás nemá absolvovaného Fecka.
- Druhý problém: Nám nestačí hocijaká funcia, hľadáme takú funkciu f, ktorá spĺňa
$$\int_0^R 2\pi r f(r)\ \mathrm{d}r = 0.$$
Týmto chcel básnik (akože ja) povedať, že voda v skúmavke sa nekotí a jej množstvo je rovnaké ako v referenčnom prípade.

Preto nastupuje na rad numerika. Aby sme našli aspoň približné číselné riešenie, interval $[0, R]$ rozsekáme na hrozne prťavé kúsky o veľkosti $\mathrm{d}r$ a v nich si budeme pamätať hodnoty funkcie f. Integrovanie nahradíme sumáciou a deriváciu rozdielom dvoch susedných hodnôt predeleným $\mathrm{d}r$. K danej f už teda poľahky vieme nájsť hodnotu ΔE! Ako však násjť funkciu s minimálnou ΔE?

Prvoplánovým a pre tento problém použiteľným riešením je zobrať nejakú, hociakú f, a skúšať na ňu aplikovať drobné zmeny. Ak sa ΔE zníži, zmenu zapamätáme, ak nie, zrušíme ju. Takto skúšame postupne všetky zmeny. V okamihu, keď už žiadna zmena nevedie k zmenšeniu ΔE, prehlásime, že sme našli optimum. A čože sú to presne tie naše zmeny? Prvoplánové (zlé) riešenie je zobrať $f(r)$ a zmeniť jeho hodnotu o Δh, čo bude nejaká nami zvolená malá konštanta. Toto je však cesta do pekla – naše zmeny nám menia objem vody v skúmavke. Preto to spravíme inak. Okrem toho, že $f(r)$ zväčšíme (zmenšíme) o Δh, zmenšíme (zväčšíme) všetky hodnoty funkcie f o presne takú hodnotu $\Delta h'$, že $\Delta h\pi((r+dr)^2 - r^2) = \Delta h'\pi R^2$. Takýmto trikom iba „prelejeme“ vodu z jedného miesta v skúmavke na iné. A je to. Koľkože to touto skvelou metódou vyšlo? Keďže som príliš lenivý to kódiť, zacitujem pánov v.u.f. Kubinu a Mazáča: rozdiel výšok 2.8 mm, kontaktný uhol 59°.[26]

[26] Zamyslite sa nad tým, ako tento kontaktný uhol priamo vypočítať. Konkrétne si skúste si rozmyslieť, aké sily pôsobia na molekuku vody priamo na trojrozhraní voda-sklo-vzduch.

Aby som vynahradil svoju lenivosť problém vlastnoručne naprogramovať, prikladám na záver aspoň zopár filozofických otázok, nad ktorými je dobré sa zamyslieť: Ako zvoliť Δh, aby sme dostali čo najlepší výsledok za čo najkratší čas? Ako by mohla vyzerať optimálna Δh ako funkcia konfigurácie (tj. času, výšky vody, zlepšenia za poslednú iteráciu, ...)? Sú veličiny ako σ_{sa}, σ_{vs} priamo zistiteľné nejakým meraním? Čo je pre výsledok naozaj dôležité?

V tomto konkrétnom príklade sme mali trochu šťastia – podarilo sa nám navrhnúť takú sadu drobných zmien, ktoré zachovávali našu väzbu, t.j. množstvo vody v skúmavke. Viete si predstaviť systém, kde by navrhnúť takéto zmeny nebolo jednoduché? Ako by ste postupovali potom?

Výsledková listina FX po šiestej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-15	FX16	FX17	FX18	$\sum$
1.	Filip Kubina	48.2	4	5	3.5	60.7
2.	Jan Hermann	45	2	5	1	53
3.	Peter Vanya	24.9	1	2.1	-	28
4.	Lukáš Konečný	20.7	-	-	-	20.7
5.	Michal Spišiak	19	-	-	-	19
6.	Dalimil Mazáč	10	-	-	5	15
7.	Lucia Simanová	11.5	-	-	-	11.5
8.	Mária Kieferová	6.4	1	3.1	-	10.5
9.	Samuel Hapák	8.5	-	-	-	8.5
10.	Dávid Vendel	5	-	-	-	5
11.	Ivan Burmister	1	-	-	-	1
	Michal Hojčka	1	-	-	-	1
	Peter Ondáč	1	-	-	-	1
14.	Zuzana Horváthová	0	-	-	-	0
	Eugen Hruška	0	-	-	-	0
	Barbora Sedlačková	0	-	-	-	0
	Alena Černá	0	-	-	-	0