Ekvivalencia odporových schém

Tomáš Bzdušek, Tomáš Kulich, Jakub Závodný
28. februára 2008

Úvod

Uvažujme zariadenie (čiernu skrinku) s n svorkami, ktoré sú vnútri spojené odporovou schémou. Správanie takejto skrinky v elektrickom obvode sa dá charakterizovať závislosťou prúdu, ktorý cez ňu tečie, od napätí na jej svorkách. Môžeme ju teda modelovať ako operátor $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mapujúci vektor potenciálov na svorkách $U = (U_i)_{i=1}^n$ do vektoru prúdov $(I_i)_{i=1}^n$. Znamienko prúdu položme kladné, ak tečie do krabičky.

Základná charakteristika operátora vodivosti

Ak považujeme rezistory vnútri skrinky za ideálne, prúdy na svorkách budú závisieť iba od okamžitých potenciálov, teda nie napríklad od ich predchádzajúceho priebehu alebo od času. Správanie skrinky teda naozaj môžeme zapísať ako $I = C(U)$, kde operátor C budeme nazývať operátorom vodivosti.

Z linearity Ohmovho zákona (resp. zo zákona superpozície v elektromagnetizme) vyplýva, že operátor C bude lineárny. Ak totiž vezmeme dve situácie (potenciály a prúdy), v ktorých sa skrinka môže nachádzať, a sčítame resp. vynásobíme konštantou všetky potenciály a prúdy v každom jej bode, znova dostaneme prípustnú situáciu, spĺňajúcu všetky fyzikálne zákony. Keďže každý lineárny operátor $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ môžeme reprezentovať maticou $(c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, pre prúdy a napätia bude platiť n rovníc tvaru

$$\textstyle\sum_{j=1}^n c_{ij} U_j = I_i. \tag{1}$$

Ak na všetky svorky privedieme rovnaký potenciál (bez ujmy na všeobecnosti nech je veľkosti 1), cez skrinku zrejme nebude tiecť žiadny prúd. Z rovnice (1) dostávame

$$\textstyle\sum_{j=1}^n c_{ij} = 0 \tag{2}$$

pre všetky $i = 1, \dots, n$. Tiež vieme, že nezávisle na potenciáloch na svorkách bude celkový prúd tečúci do skrinky nulový. Konkrétne to bude platiť aj pre všetky bázové vektory napätia $(U_j) = \delta_{jk}$, čo v rovnici (1) znamená

$$\textstyle\sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\delta_{jk} = \sum_{i=1}^n c_{ik} = 0 \tag{3}$$

pre všetky $k = 1, \dots, n$. Inými slovami, rovnice (2) a (3) hovoria, že súčet prvkov v každom riadku a každom stĺpci matice (c_{ij}) bude nulový.

Tieto podmienky však ešte stále úplne nevymedzujú práve tie operátory, ktoré zodpovedajú nejakej odporovej schéme. Uvažujme napríklad operátor daný maticou

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Pri meraní odporu medzi prvými dvoma svorkami sa tretia svorka javí ako vodivo spojená s prvou, pri meraní medzi druhou a treťou svorkou sa prvá javí ako vodivo spojená s druhou, avšak v oboch prípadoch nameriame rovnaký, nenulový odpor. Toto naznačuje, že operátor B nie je operátorom vodivosti žiadnej reálnej odporovej schémy, i keď spĺňa všetky horeuvedené podmienky.

Úplná charakteristika operátora vodivosti

Predpokladajme, že odporová schéma vnútri čiernej skrinky skladá z m uzlov spojených rezistormi, nech prvých n uzlov sú svorky. Nech sú pre každé $i, j = 1, \ldots, n$ uzly i a j spojené rezistorom s nezápornou vodivosťou $a_{ij} = 1/r_{ij}$. (Ak sú uzly i a j spojené vodivo, čo by znamenalo $a_{ij} = \infty$, zlúčime ich predtým do jedného uzlu. Ak nie sú spojené rezistorom, položíme jednoducho $a_{ij} = 0$. Ak bude medzi dvoma uzlami viac rezistorov, ich vodivosti sčítame. Týmto sa bez ujmy na všeobecnosti vyhneme technickým problémom.) Z tejto definície mimo iného vyplýva $a_{ij} = a_{ji}$.

Nateraz predpokladajme, že svorky zavedieme do všetkých uzlov. Inými slovami, umožníme na chvíľu prúdu vtekať a vytekať zo skrinky v každom uzle. Označme potenciál v i-tom uzle ako U_i a prúd vtekajúci do skrinky cez i-ty uzol ako I_i (všimnime si, že toto značenie je konzistentné s predchádzajúcim). Z Ohmovho zákona dostaneme prúd tečúci z uzlu i do uzlu j:

$$I_{i \to j} = (U_i - U_j) a_{ij}. \tag{5}$$

Z Kirchhofovho zákona (resp. zákona zachovania náboja) potom pre každý uzol i dostávame

$$\textstyle\sum_{j=1, j \neq i}^{m} I_{i \to j} = \sum_{j=1, j \neq i}^{m} (U_i - U_j) a_{ij} = I_i. \tag{6}$$

Týchto m rovníc môžeme znova interpretovať ako operátor vodivosti C pôsobiaci na vektor potenciálov, tentoraz potenciálov na všetkých uzloch skrinky. Ak chceme znova vzťah potenciálov a prúdov charakterizovať ako $I = CU$ (čiže $I_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} U_j$), z rovníc (6) dostávame vyjadrenie pre prvky matice $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m}$:

$$c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{ak } i \neq j, \text{ a} \\ \sum_{k=1, k \neq i}^{m} a_{ik} & \text{ak } i = j. \end{cases} \tag{7}$$

Operátor C je teda operátor vodivosti našej čiernej skrinky, ktorej sme akoby do všetkých uzlov zaviedli svorky.

Všimnime si, že matica operátora C bude spĺňať podmienky odvodené v predošlej časti a tiež niektoré ďalšie. Konkrétne, hneď z definície vidno, že *súčet prvkov každom riadku bude nulový.* Zo symetrie matice A vyplýva, že aj *matica C bude symetrická* (čiže $c_{ij} = c_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, \ldots, m$), a teda aj *súčet prvkov v každom stĺpci bude nulový.* Nakoniec, keďže vodivosti a_{ij} sú nezáporné, *diagonálne prvky matice C budú nezáporné a mimodiagonálne prvky budú nekladné.* V nasledujúcom texte ukážeme, že tieto podmienky bude vodivostný operátor našej skrinky spĺňať aj vtedy, keď do vnútorných uzlov svorky nezavedieme.

Ak mala pôvodná skrinka nejaké vnútorné uzly (t.j. ak $m > n$), ktoré sme v predošlých odsekoch umelo pripojili k novým svorkám, skúsme posledný z nich (m-tý) od príslušnej svorky odpojiť. Inými slovami, zavádzame dodatočnú podmienku $I_m = 0$ a strácame kontrolu nad potenciálom U_m.

Dostaneme tak čiernu skrinku s $m - 1$ svorkami (a jedným vnútorným uzlom), ktorej operátor vodivosti C' vieme vyjadriť z operátora C. Ak totiž na jej $m - 1$ svoriek privedieme potenciály $U_1, \ldots, U_{m-1}$, na odpojenej m-tej svorke sa ustáli napätie U_m, aby $I_m = 0$. Túto podmienku vieme vyjadriť ako

$$C \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{m-1} \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

a hodnotu U_m nájdeme z rovnice pre posledný komponent vektoru prúdu,

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} c_{mj} U_j = I_m = 0. \tag{9}$$

Ak $c_{mm} \neq 0$, potom

$$U_m = \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} -\frac{c_{mj}}{c_{mm}} U_j. \tag{10}$$

Pre zvyšné zložky prúdu $I_1, \ldots, I_{m-1}$ teda dostávame

$$\begin{aligned} I_i &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} c_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{m-1} c_{ij} U_j + c_{im} U_m \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} c_{ij} U_j + c_{im} \sum_{i=1}^{m-1} -\frac{c_{mj}}{c_{mm}} U_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} \left(c_{ij} - \frac{c_{im} c_{mj}}{c_{mm}} \right) U_j. \end{aligned} \tag{11}$$

Tieto rovnice kompletne popisujú správanie novej ($(m-1)$-svorkovej) skrinky. Dostávame z nich maticu operátora $C' = (c'_{ij})_{i,j=1}^{m-1}$,

$$c'_{ij} = c_{ij} - \frac{c_{im} c_{mj}}{c_{mm}}. \tag{12}$$

Ľahko overíme, že matica C' spĺňa vlastnosti matice C zmienené v predošlom texte. Zrejme bude symetrická, keďže

$$c'_{ij} = c_{ij} - \tfrac{c_{im} c_{mj}}{c_{mm}} = c_{ji} - \tfrac{c_{mi} c_{jm}}{c_{mm}} = c'_{ji}, \tag{13}$$

súčet prvkov v i-tom riadku

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^{m-1} c'_{ij} &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1}\left(c_{ij} - \frac{c_{im}c_{mj}}{c_{mm}}\right) + \left(c_{im} - c_{im}\frac{c_{mm}}{c_{mm}}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} c_{ij} + \frac{c_{im}}{c_{mm}}\sum_{j=1}^{m} c_{mj} = 0 + 0\end{aligned}$$

je nulový, a zo symetrie súčet prvkov v každom riadku bude tiež nulový. Nakoniec, pre $i \neq j$ menšie než m máme $c_{ij} \leq 0$, $c_{im} \leq 0$, $c_{mj} \leq 0$ a $c_{mm} \geq 0$, preto $\frac{c_{im}c_{mj}}{c_{mm}} \geq 0$ a teda

$$c'_{ij} = c_{ij} - \tfrac{c_{im}c_{mj}}{c_{mm}} \leq c_{ij} \leq 0 \tag{14}$$

pre mimodiagonálne prvky c'_{ij}. Z nulovosti súčtu prvkov v každom riadku dostaneme pre diagonálne prvky

$$c'_{ii} = -\textstyle\sum_{j=1, j\neq i}^{m-1} c'_{ij} \geq 0. \tag{15}$$

Ak teda $c_{mm} \neq 0$, operátor C' pre skrinku bez poslednej svorky bude spĺňať všetky stanovené podmienky. Ak však $c_{mm} = 0$, situácia je veľmi jednoduchá. (Rozmyslite si, že zodpovedá izolovanej svorke m.) Keďže súčet prvkov v m-tom riadku je nulový, $c_{mm} = 0$, a zvyšné prvky v riadku sú nekladné, musia byť všetky nulové. Zo symetrie bude m-tý stĺpec tiež nulový. Podmienka $I_m = 0$ bude teda automaticky splnená, a rovnica (8) sa redukuje na $C'U = I$, kde $C' = (c_{ij})_{i,j=1}^{m-1}$. Matica operátora C' bude len ľavá horná $(m-1) \times (m-1)$ podmatica matice C, a všetky stanovené vlastnosti (symetria, nulové súčty, znamienka prvkov) zostanú pre ňu zachované.

Opakovaním tejto operácie „odpojenia svorky“ $(m-n)$krát dostaneme operátor vodivosti $\tilde{C} = C^{(m-n)}$ reprezentujúci pôvodnú skrinku s n svorkami. (V stave, keď sme odpojili práve všetky pôvodne vnútorné uzly.) Navyše, matica operátora $\tilde{C}$ bude spĺňať všetky stanovené vlastnosti, keďže tieto sa zachovávajú pri každom odpojení vnútorného uzlu, t.j. pri každej redukcii operátora $C^{(k)} \to C^{(k+1)}$.

Matica operátora vodivosti C ľubovoľnej skrinky s konečnou odporovou schémou bude teda symetrická, súčet prvkov v každom jej riadku aj stĺpci bude nulový, všetky jej diagonálne prvky budú nezáporné a všetky mimodiagonálne prvky nekladné.

Ekvivalencia schém

Je každá matica spĺňajúca tieto podmienky maticou operátora vodivosti nejakej odporovej schémy? Z predchádzajúcich úvah ľahko nahliadneme, že áno. Pre takúto maticu $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ uvažujme skrinku s n svorkami, kde medzi svorky i a j pre všetky $i \neq j$ zapojíme rezistor s odporom $-1/c_{ij} = -1/c_{ij}$. (Resp. žiaden rezistor, ak $c_{ij} = c_{ji} = 0$.) Všetky tieto odpory budú kladné, a z rovnice (7) a podmienky $c_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij}$ dostávame, že matica operátora vodivosti pre túto schému bude naozaj práve matica C.

Ľubovoľná konečná odporová schéma s n vonkajšími svorkami sa teda dá nahradiť ekvivalentnou schémou s $\binom{n}{2}$ (alebo menej) rezistormi zapojenými medzi týmito svorkami.

Poznámky

1. V celom texte sme implicitne predpokladali, že na svorky môžeme priviesť ľubovoľné potenciály. Náš model teda nepripúšťa idealizovanú situáciu s vodivo (nulovým odporom) spojenými svorkami. Tento nedostatok sa ale jednoducho odstráni zlúčením svoriek v úvahách o operátore vodivosti, a v reálnych situáciách vôbec nenastáva, keďže medzi každými dvoma svorkami je odpor nenulový.

2. Tiež treba upozorniť, že tieto úvahy sa a priori nedajú použiť pre nekonečné schémy. Nahrádzanie ekvivalentnými schémami treba v takých prípadoch odôvodniť osobitnými argumentami.

3. Pri konečných odporových schémach sa vyššie popísaný algoritmus odpájania uzlov dá využiť na výpočet odporu medzi dvoma uzlami. Ak v schéme odpojíme všetky uzly okrem dvoch, zostane nám matica vodivosti pre dvojsvorkovú schému. Táto bude mať triviálny tvar

$$\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix},$$

kde A bude vodivosť schémy medzi zvyšnými dvoma svorkami. Tento algoritmus je jednoduchý, robustný (funguje aj pre degenerované schémy) a jeho časová zložitosť je $O(m^3)$ (kde m je počet uzlov v schéme).

4. Ak U je vektor potenciálov a I vektor prúdov na svorkách skrinky, potom $U \cdot I = U^{\mathrm{T}} I$ je celkový výkon konaný na skrinke. Keďže však $I = CU$, môžeme tento výkon zapísať aj ako $P = U^{\mathrm{T}} CU$. Využitím symetrie a nahradením diagonálnych prvkov matice C dostaneme

$$\begin{aligned} P &= \textstyle\sum_{i,j} c_{ij} U_i U_j = \sum_{i\neq j} c_{ij} U_i U_j + \sum_i c_{ii} U_i^2 \\ &= \textstyle\sum_{i>j} 2c_{ij} U_i U_j - \sum_i \sum_{j\neq i} c_{ij} U_i^2 \\ &= \textstyle\sum_{i>j} (-c_{ij})(U_i - U_j)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

čo je mimochodom zrejmé použitím ekvivalentnej schémy s $\binom{n}{2}$ rezistormi. Keďže mimodiagonálne prvky c_{ij} sú nekladné, dostávame $P \geq 0$. Výkon skrinky je teda pozitívnou kvadratickou formou na potenciáloch U.